

## Tesis de Posgrado

# Renormalización, vacío semiclásico y cosmologías autoconsistentes

Paz, Juan Pablo

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias  
Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Paz, Juan Pablo. (1987). Renormalización, vacío semiclásico y cosmologías autoconsistentes. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2062\\_Paz.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2062_Paz.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Paz, Juan Pablo. "Renormalización, vacío semiclásico y cosmologías autoconsistentes". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1987.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2062\\_Paz.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2062_Paz.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

RENORMALIZACION, VACIO SEMICLASICO  
Y COSMOLOGIAS AUTOCONSISTENTES

Autor: Juan Pablo Paz

Director: Mario A. Castagnino

Lugar de trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio  
(Becario del Consejo Nacional de Investigaciones  
Científicas y Técnicas)

- 2062 -  
ef. 2

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

-1987-

**a Silvina y Luciano**

## INDICE

RESUMEN.....	1
INTRODUCCION.....	2
1. LA TEORIA DE CAMPOS EN EL ESPACIO TIEMPO CURVO.	
1.1 Introducci3n.....	7
1.2 C3lculo de la acci3n efectiva y renormalizaci3n.....	17
1.3 Las ecuaciones de campo efectivas y el tensor de energ3a momento.....	33
2. RENORMALIZACION DEL TENSOR DE ENERGIA MOMENTO	
2.1 Campos Libres y Renormalizaci3n de Hadamard.....	39
2.2 Renormalizaci3n M3nima.....	54
3.3 Regularizaci3n Adiab3tica: un c3lculo expl3cito de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ .....	58
3. EL PROBLEMA DEL VACIO	
3.1 Introducci3n.....	73
3.2 Datos de Cauchy y Estructura del propagador.....	79
4. EL PROBLEMA DEL BACK-REACTION	
4.1 Introducci3n.....	94
4.2 El problema del back-reaction para un campo escalar autointeractuante.....	96
4.3 El problema del back-reaction para campos libres. El caso invariante conforme.....	116
4.4 El problema del back-reaction para campos libres. Campos masivos: soluciones tipo DeSitter.....	123
4.4 Back-reaction y topolog3a.....	131
5. CONCLUSIONES.....	142
APENDICE 1: Convenciones y notaciones.....	146
APENDICE 2: Regularizaci3n de las integrales que aparecen en la secci3n 2.3.....	150
APENDICE 3: C3lculo del propagador adiab3tico en las m3tricas (3.3).....	152
APENDICE 4: C3lculo de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ a partir del propagador de Shwinger DeWitt.....	154
REFERENCIAS.....	156
AGRADECIMIENTOS.....	164

## RESUMEN

En esta tesis se discuten distintos aspectos relacionados con la teoria de campos en el espacio tiempo curvo (que es considerada, en general, como una aproximacion semiclasica a una teoria mas completa que incluya los efectos cuanticos de la gravitacion).

En primer termino, analizamos en detalle dos de sus aspectos mas conflictivos: el problema de la renormalizacion (necesaria para eliminar las cantidades divergentes que aparecen en toda teoria cuantica de campos) y el problema de la ambigüedad en la definicion del estado de vacio. El problema de la renormalizacion es enfocado tanto al nivel de la accion efectiva (la que es calculada en la aproximacion de un loop) como al nivel de las ecuaciones efectivas de campo (utilizamos en este caso el formalismo que permite trabajar con ecuaciones para valores medios). Luego de presentar el metodo corriente de renormalizacion covariante (conocido como renormalizacion de Hadamard) que da lugar a la aparicion de terminos anómalos en el valor de expectacion de vacio del tensor de energia momento, describimos un metodo que, pese a que solo es aplicable en metricas conformemente planas, evita la aparicion de la anomalia de traza. Presentamos tambien un calculo explicito del valor de expectacion de vacio renormalizado de  $T$  (usando el metodo conocido con el nombre de regularizacion adiabatica) para campos de espin arbitrario en el espacio de DeSitter. Relacionamos el problema de la ambigüedad en la definicion de vacio con el de la renormalizacion y encontramos cuales son los vinculos que aparecen sobre los estados de vacio si se impone que la teoria sea renormalizable.

Por ultimo presentamos un metodo mediante el cual se puede estudiar consistentemente, en el contexto de la teoria cuantica de campos en el espacio tiempo curvo, la importancia de los efectos cuanticos en cosmologia (mediante el uso de las ecuaciones semiclasicas de Einstein). Para el caso de un campo escalar autointeractuante, obtenemos la version renormalizada de las ecuaciones semiclasicas de Einstein y de la que gobierna la evolucion del valor medio del campo. Comparamos las ecuaciones obtenidas con aquellas que se utilizan en los trabajos relacionados con el modelo del universo inflacionario y comprobamos que estas pueden obtenerse a partir de las nuestras haciendo ciertas aproximaciones (que no estan explicitadas habitualmente en la literatura). Analizamos tambien las propiedades de algunas soluciones exactas de las ecuaciones semiclasicas de Einstein que se obtienen para teorias de campos sencillas (campos libres). En particular estudiamos las caracteristicas de la solucion de DeSitter y mostramos la posibilidad de que la topologia del espacio tiempo pueda reaccionar sobre la geometria local a traves de las ecuaciones semiclasicas.

## INTRODUCCION

La teoría cuántica de campos comenzó a ser estudiada en espacios tiempos no triviales desde hace muchos años. Uno de los primeros trabajos en el tema fue escrito por el propio Schrödinger en (1932). A medida que pasaron los años varios autores se fueron ocupando de este tema que, sin embargo ocupó una posición relativamente marginal en el contexto de la física teórica. Fue a partir de los trabajos de Hawking en 1974, (ver Hawking (1974), (1976) y (1977)) sobre la emisión de radiación por parte de los agujeros negros debida a los efectos cuánticos, que el tema comenzó a concitar el interés de mayor número de investigadores.

La formulación de esta teoría, de la que nos ocuparemos en esta tesis, no está aún completamente concluida (para una revisión completa del tema referimos al libro de Birrell y Davies (1981)). Subsisten diversos problemas a los que prestaremos atención en este trabajo. Los más conflictivos son aquéllos relacionados con la definición del estado de vacío de la teoría y con la renormalización de las cantidades divergentes que aparecen. Ambos problemas están presentes en la teoría cuántica de campos ordinaria, formulada en el espacio de Minkowski, pero pueden ser fácilmente resueltos. En efecto, para una teoría de un campo escalar, el estado de vacío puede ser definido sin ninguna ambigüedad si, apelando a la simetría del espacio de Minkowski, reconocemos como operadores de creación y destrucción de partículas a aquéllos asociados a la descomposición del campo en ondas

planas de frecuencia positiva y negativa. Por otra parte, la existencia de cantidades divergentes es bien conocida: si se calcula el valor de expectación de vacío del operador Hamiltoniano se obtiene un resultado infinito que habitualmente es eliminado mediante el "ordenamiento normal de operadores". Este procedimiento está plenamente justificado ya que la energía siempre está definida a menos de una constante (que puede ser considerada infinita).

Pero si estudiamos una teoría de campos en un espacio tiempo genérico (una variedad diferenciable con una métrica riemanniana) las cosas son más complicadas. Por un lado aparece el problema de la ambigüedad en la elección del vacío ya que, como en general el espacio tiempo carecerá de simetrías, no podremos privilegiar ninguna base para que juegue el papel de las ondas planas en el espacio de Minkowski. Por otra parte ya no es cierto que sólo tengan sentido las diferencias de energías ya que la densidad de energía es ahora la componente de un tensor que actúa como fuente de las ecuaciones de campo que gobiernan la dinámica de la métrica del espacio tiempo. La renormalización debe hacerse entonces mediante un método covariante que reemplace al ordenamiento normal de operadores. A lo largo de la tesis veremos que estos dos problemas, la elección del estado de vacío y la renormalización están fuertemente relacionados.

Uno de los motivos que generan interés en el estudio de la teoría cuántica de campos en el espacio tiempo curvo se basa en la posibilidad de encarar a través de ella el examen de la influencia de los efectos cuánticos en cosmología. Para estudiar estos efectos se utiliza la ecuación de Einstein semiclásica en la cual la fuente que

genera la dinámica de la métrica del espacio tiempo es el valor de expectación del tensor de energía momento. En los últimos años la influencia de los efectos cuánticos en cosmología ha sido utilizada enormemente en la construcción del modelo del universo inflacionario (ver Brandenberger (1985) y Linde (1984) para una revisión del tema). En estos modelos las técnicas de la teoría de campos en el espacio tiempo curvo son en general dejadas de lado, en particular los distintos autores no utilizan a la ecuación de Einstein semiclásica en sus trabajos. En esta tesis intentaremos comparar el método habitualmente usado en la literatura relacionada con el modelo inflacionario con aquél que corresponde a trabajar con la ecuación de Einstein semiclásica como herramienta para incorporar los efectos cuánticos en cosmología. Intentaremos además analizar algunas de las características principales de las soluciones de las ecuaciones de Einstein semiclásicas en algunos ejemplos sencillos.

La tesis está organizada de la siguiente manera: En el Capítulo 1 presentaremos formalmente a la teoría de campos en el espacio tiempo curvo y discutiremos bajo qué hipótesis puede ser considerada como una aproximación semiclásica a una teoría cuántica más completa. Este Capítulo tendrá un carácter de revisión del tema (por lo cual no nos hemos extendido en esta introducción) y en él abordaremos el problema del cálculo de la acción efectiva de la teoría en la aproximación de un loop (para una teoría con un campo escalar autointeractuante) utilizando el método del campo de fondo y los recientes resultados relacionados con el desarrollo de Schwinger-DeWitt para el propagador. Discutiremos también, el problema de la renormalización al nivel de la acción efectiva.



En el capítulo 2 discutiremos el problema de la renormalización de la teoría, para campos libres, al nivel del tensor de energía momento (o de las ecuaciones de campo). Presentaremos el método de renormalización covariante conocido con el nombre de "renormalización de Hadamard" (que conduce entre otras cosas a la aparición de términos "anómalos" o clásicamente prohibidos en el tensor de energía momento renormalizado). Generalizaremos a métricas arbitrarias conformes al plano el método conocido como "renormalización mínima" (que evita la aparición de los terminos anómalos) que hasta el presente sólo había sido formulada en métricas de Robertson Walker. Finalmente, luego de presentar el método de regularización adiabática lo aplicamos al cálculo del valor renormalizado de la traza del tensor de energía momento para campos de Weinberg masivos (de espín arbitrario) en el espacio de DeSitter.

En el Capítulo 3 discutiremos el problema de la ambigüedad en la elección del estado de vacío. Analizaremos, para un conjunto amplio de métricas de fondo, cuáles son los vínculos sobre los posibles estados de vacío que establece la condición que pide que el propagador  $G_1(x, x')$  tenga las mismas divergencias que uno de Hadamard. Discutiremos la compatibilidad entre esta condición y los criterios utilizados para definir el vacío mediante la diagonalización del Hamiltoniano (en sus diferentes versiones).

En el Capítulo 4 analizaremos el problema relacionado con el estudio de las soluciones a las ecuaciones de Einstein semiclásicas que es habitualmente llamado "el problema del back-reaction". Daremos un método para encarar su solución para un campo escalar

autointeractuante. Nuestro método permitirá comparar las ecuaciones que se obtienen con las que se utilizan habitualmente en las versiones simplificadas de los modelos inflacionarios. Analizaremos también las características de la solución del problema del back-reaction para campos libres. Luego de una revisión del método que permite obtener todas las familias de soluciones al problema cuando sólo actúan campos invariantes conformes, analizaremos con generalidad las propiedades de una solución exacta (cuando los campos no son invariantes conformes): el espacio de DeSitter. Por último analizaremos, también para las soluciones tipo DeSitter, los efectos del back-reaction de la topología sobre la geometría a través de las ecuaciones de Einstein semiclásicas.

Finalmente en 5 presentaremos nuestras conclusiones y haremos un breve resumen de los aportes originales contenidos en esta tesis.

La notación y las convenciones que utilizamos están resumidas en el apéndice 1. Trabajaremos, salvo mención explícita en contra, en unidades naturales, es decir tomaremos  $c=1=$

## CAPITULO 1

## La Teoría Cuántica de Campos en el Espacio Tiempo Curvo.

## 1.1 Introducción

Consideremos un sistema formado por varios campos que denotaremos con el símbolo  $\phi_a$  y por un campo gravitatorio descrito a través del tensor métrico del espacio tiempo  $g_{\mu\nu}$ . La acción clásica del sistema estará definida de la siguiente manera:

$$S[\phi_a, g_{\mu\nu}] = S_{\text{grav}}[g_{\mu\nu}] + S_{\text{mat}}[\phi_a, g_{\mu\nu}] \quad (1.1a)$$

No especificaremos por ahora la forma explícita de la "acción de la materia"  $S_{\text{mat}}$  y tomaremos como acción gravitatoria a la acción de Einstein-Hilbert generalizada con términos cuadráticos en la curvatura (la presencia de estos términos veremos que está relacionada con el proceso de renormalización de la teoría):

$$S_{\text{grav}}[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \left\{ \frac{R - 2\Lambda}{\kappa} - \epsilon_1 R^2 - \epsilon_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \epsilon_3 R_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu\sigma\tau} \right\} \quad (1.1b)$$

donde  $\kappa$ ,  $\Lambda$ ,  $\epsilon_i$  son constantes con las siguientes dimensiones:

$$[\kappa = 8\pi G] = L^2 = [\Lambda^{-1}] \quad ; \quad [\epsilon_i] = 1$$

En una descripción completamente cuántica, toda la información sobre el sistema está contenida en la "acción efectiva". Para introducir esta funcional conviene recordar algunas definiciones habituales en teoría cuántica de campos (éstas pueden encontrarse en cualquier libro de texto, por ejemplo en el de Ramond (1981) o el de Itzigson y Zuber (1980)).

Por el momento, consideremos a la métrica como uno más de los campos  $\phi_a$ ; la amplitud de probabilidad de transición de un estado cuántico  $|A\rangle$  a otro  $|A'\rangle$  (caracterizados por ciertas configuraciones de los campos presentes sobre las hipersuperficies  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  respectivamente) en presencia de fuentes  $J_a$  puede calcularse mediante una integral funcional

$$\langle A|A'\rangle_{J_a} = N \int D\phi_a \exp i \left\{ S[\phi_a] + (\phi_a \cdot J_a) \right\} \quad (1.2)$$

donde por  $D\phi_a$  denotamos las medidas de integración en los espacios de las configuraciones de los campos y con el símbolo  $(a \cdot b)$  denotamos la integral del producto sobre todo el espacio tiempo.

La integral funcional en (1.2) implica sumar sobre todas las configuraciones de los campos que satisfagan las condiciones de contorno que definen a los estados  $|A\rangle$  y  $|A'\rangle$  en las hipersuperficies  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ .

La funcional  $W(J_a)$ , generadora de los diagramas de Feynmann conexos se calcula como

$$e^{iW[J_a]} = \frac{\int \mathcal{D}\phi_a \exp i \{ S[\phi_a] + (\phi_a \cdot J_a) \}}{\int \mathcal{D}\phi_a \exp i S[\phi_a]} \quad (1.3)$$

Los "campos clásicos" o "campos medios" se definen de la siguiente manera:

$$\bar{\phi}_a = \frac{\delta W}{\delta J_a} \quad (1.4)$$

estos campos son evidentemente funcionales de las corrientes tal como puede verse de la definición anterior. La acción efectiva queda definida como la transformada de Legendre de  $W(J_a)$ , o sea

$$\Gamma[\bar{\phi}_a] = W[J_a] - (J_a \cdot \bar{\phi}_a) \quad (1.5)$$

Como las corrientes  $J_a$  satisfacen las ecuaciones (1.4) son funcionales de los "campos clásicos", en consecuencia la acción efectiva es solamente funcional de los "campos clásicos" (y no de las corrientes). Derivando funcionalmente la expresión anterior se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\phi}_a} = J_a \quad (1.6)$$

Vemos entonces que los "campos clásicos" son soluciones de "ecuaciones efectivas" de movimiento: cuando se anulan las corrientes, las configuraciones  $\bar{\phi}_a[J_a=0]$  son aquéllas que hacen extrema a la acción efectiva. Dijimos que de la acción efectiva puede extraerse toda la

información física de la teoría ya que la misma es la generadora de todos los diagramas una-partícula-irreducibles (1-P-I) que pueden obtenerse por diferenciación funcional sucesiva. En efecto  $\Gamma[\bar{\phi}]$  puede escribirse de la siguiente forma:

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \sum_{N=1}^{\infty} \int d^4x_1 \dots d^4x_N \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_N) \quad (1.7)$$

(donde en esta última expresión hemos obviado todos los subíndices sobreentendiendo que deben estar todos convenientemente contraídos). Los coeficientes  $\Gamma^{(N)}$  (que en nuestro caso son "matrices") son denominados vértices propios de la teoría y pueden ser calculados perturbativamente con las reglas de Feynmann usuales. El conocimiento de la acción efectiva como funcional de los "campos clásicos" es importante pues permite plantear las ecuaciones (1.5) y de ellas se puede extraer abundante información. Para obtener la forma explícita de  $\Gamma[\bar{\phi}]$  el uso de la expresión (1.7) es muy engorroso (no hay, en general, un criterio que nos permita cortar la serie que aparece en esa ecuación). Con ese objeto, suele utilizarse otra forma de escribir a la acción efectiva haciendo un desarrollo local en términos de las derivadas de los "campos clásicos". En efecto, si nos restringimos a considerar un solo campo  $\phi$  en el espacio de Minkowski, la acción efectiva puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\Gamma[\bar{\phi}] = - \int d^4x \left\{ V_{\text{eff}}(\bar{\phi}) + Z(\bar{\phi}) \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} + (\text{términos con derivadas superiores de } \bar{\phi}) \right\} \quad (1.8)$$

Se han desarrollado diversos métodos (perturbativos y no perturbativos) para calcular los distintos términos en la expansión anterior. El primer término que aparece en (1.8) es llamado "potencial efectivo" y su conocimiento es de gran importancia para el estudio de las distintas fases del sistema.

Comentaremos brevemente aquí el método del campo de fondo (MCF) que es tal vez el que más eficazmente permite el cálculo de la acción efectiva entre los métodos perturbativos conocidos. No nos referiremos en esta tesis a los métodos no perturbativos que pueden utilizarse para el cálculo de la acción efectiva. Sin embargo conviene mencionar que el que más ha sido utilizado recientemente es el método variacional desarrollado por Jackiw y Kerman (1979) y que suele denominarse "aproximación gaussiana" (que en teoría de muchos cuerpos corresponde a la aproximación de Hartree-Fock dependiente del tiempo). Este método se ha usado mucho para el cálculo del potencial efectivo en diversas teorías (ver por ejemplo Stevenson (1984 y 1985), Stevenson y Tarrach (1986), Latorre y Pascual (1986), Bollini y Giambiaggi, (1985), Altembokum, Kaulfuss y Verbarschot (1986)) y en particular ha servido para aclarar el problema de la supuesta trivialidad de la teoría  $\lambda\phi^4$ . Sólo más recientemente (ver Altembokum y Kaulfus, 1987) se ha aplicado al cálculo de la acción efectiva completa en algunos casos particulares. En el contexto de la teoría de campos en el espacio tiempo curvo hay algunos intentos de utilizar este método en el estudio de la dinámica de las transiciones de fase en el universo primitivo (ver Cooper y Mottola, 1987, Pi y Stancioff, 1987 y Mazzitelli y Paz, 1987).

El método del campo de fondo tiene varias versiones. Usaremos aquí la desarrollada por Jackiw (1974) (otras referencias importantes en el tema son por ejemplo De Witt (1967 a,b), Abbott (1983), Jack y Osborn (1984). Jackiw estableció que la "receta" a seguir si se pretende evaluar la acción efectiva en las configuraciones  $\bar{\phi}_a$  (aquí consideramos también a la métrica como otro de los campos  $\bar{\phi}_a$ ) es la siguiente: i) Construir una "nueva teoría" para campos  $\varphi_a$  con la siguiente acción (que depende de los campos  $\bar{\phi}_a$  a los que se debe tratar como si fueran parámetros):

$$\hat{S}[\varphi_a] = S[\varphi_a + \bar{\phi}_a] - S[\bar{\phi}_a] - \left( \frac{\delta S}{\delta \bar{\phi}_a} \Big|_{\bar{\phi}_a = \bar{\phi}_a} \cdot \varphi_a \right) \quad (1.9)$$

ii) Con esa nueva teoría la acción efectiva de la teoría original se calcula de la siguiente manera:

$$\Gamma[\bar{\phi}_a] = S[\bar{\phi}_a] + W[\bar{\phi}_a] \quad (1.10)$$

donde (si hacemos reaparecer la constante de Planck por un momento)

$$W[\bar{\phi}_a] = -i\hbar \ln \left\{ \int \mathcal{D}\varphi_a \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \hat{S}[\varphi_a] - \left( \varphi_a \cdot \frac{\delta W}{\delta \bar{\phi}_a} \Big|_{\bar{\phi}_a} \right) \right\} \right\} \quad (1.11)$$

Esta última expresión es una ecuación integrodiferencial para  $W[\bar{\phi}_a]$  que evidentemente es complicada. Sin embargo la virtud del método es que no hace falta resolverla: es posible demostrar que  $W[\bar{\phi}_a]$  no es otra cosa que la suma de todos los diagramas 1-P-I de vacío de la teoría con acción  $\hat{S}$ . De esta forma el cálculo de los distintos términos del desarrollo de  $W[\bar{\phi}_a]$  en potencias de  $\hbar$  se limita



siempre a sumar un número finito de diagramas. En particular el desarrollo a un loop (recordemos que el orden en corresponde al número de loops) toma una forma particularmente sencilla ya que puede calcularse con el determinante funcional. La demostración de estas afirmaciones puede verse en el trabajo original de Jackiw (1974) (una versión más sencilla de la demostración puede encontrarse en el trabajo de O'Raifertaigh (1976).

En síntesis, el MCF permite calcular las contribuciones a la acción efectiva a cualquier número de loops (por supuesto las cuentas se vuelven cada vez más complicadas) pero es particularmente útil para calcular la contribución a un loop que puede escribirse como:

$$W[\phi_a] = \hbar \Gamma^{(1)}[\phi_a] + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

con

$$\Gamma^{(1)}[\phi_a] = -\frac{i}{2} \text{tr} \ln G_F \quad (1.12)$$

donde la traza es una integral sobre todo el espacio tiempo y una suma sobre todos los índices que pueda tener el propagador. El propagador en la expresión (1.12) es el que invierte la ecuación de campo que se genera de la parte cuadrática de la acción  $\hat{S}[\varphi_a]$  (ver más adelante ec. (1.18a)).

Ahora bien, discutamos en el caso que nos ocupa (el sistema (1.1)) cuán buena será la aproximación a un loop. Es sabido que la gravitación no puede ser cuantificada con este método. Esto ocurre porque en la acción gravitatoria considerada en (1.1) aparece una constante dimensional ( $\kappa \approx 2.5 \cdot 10^{-66} \text{ cm}^2$ ). Esto provoca que los contraterminos que hay que agregar al lagrangiano en el proceso de

renormalización tengan distinta forma funcional que los términos originalmente presentes en el mismo. Este proceso se repite indefinidamente e impide la renormalización de la teoría (nos referiremos en detalle a las técnicas de renormalización más adelante). Sin embargo sabemos que la aproximación a cero loops de la gravitación describe en forma excelente la fenomenología observada a nivel macroscópico. En efecto, la teoría clásica de la gravitación es una buena teoría para distancias "grandes" (o equivalentemente energías bajas). Esto induce a pensar que debería existir un rango de energías (o equivalentemente de distancias) en el que la aproximación a un loop de la gravitación podría ser buena. Este tema ha sido estudiado por numerosos autores, podemos mencionar aquí los trabajos citados en la introducción de su libro por Birrell y Davies (1982) y los posteriores de Castagnino y Paul (1984), Castagnino (1986), Hartle (1984), etc. La conclusión es bastante razonable: si estudiamos un diagrama con  $L$  loops del campo gravitatorio que posea  $n$  vértices y lo regularizamos con un cut-off integrando hasta una energía máxima o bien, trabajando en el espacio de configuración, integrando fuera de un hipercubo de lado  $l$ , observamos que el diagrama resulta ser proporcional a  $K^{n/2} l^{-n}$ . Para que estas contribuciones resulten despreciables frente a la contribución de un loop (que no tiene ningún vértice) debe satisfacerse la siguiente condición:

$$K^{1/2} \approx 10^{-33} \text{ cm} \ll l \quad (1.13)$$

En este rango es lícito despreciar las contribuciones de los

diagramas con mas de un loop de gravitones frente a los de un loop. Por otra parte puede demostrarse que la condición para poder despreciar loop a loop los diagramas en los que interviene el gravitón frente a los demás es:

$$\kappa^{1/2} \ell^{-1} \ll e^2 \quad (1.14)$$

donde  $e^2$  es una constante típica de acoplamiento materia-materia (que podría ser por ejemplo la de estructura fina  $e^2 \sim 1/137$ ). Esta condición es mas restrictiva que la anterior (si  $e < 1$ ). En consecuencia en este rango de distancias (superiores a la longitud de Planck) se puede trabajar con una aproximación a la acción efectiva que incluya los efectos de un loop del campo gravitatorio y los efectos de todos los demas campos a todo orden en  $\hbar$ .

Otro desarrollo perturbativo muy popular en teoría de campos es el desarrollo en  $1/N$  (donde  $N$  es el número de campos presentes). En una expansión de este tipo es posible demostrar (Hartle, 1984) loop a loop que las contribuciones del campo gravitatorio son de un orden mayor que las de todos los otros campos. Con este criterio podríamos "despreciar" la contribución de un loop del campo gravitatorio frente a la de todos los demás campos. Por lo tanto, la teoría que trata a la métrica del espacio tiempo como un campo clásico y aproxima la acción efectiva de la teoría como:

$$\Gamma[\bar{\phi}_a, \bar{g}_{\mu\nu}] = S_{\text{grav}}[\bar{g}_{\mu\nu}] + S_{\text{mat}}[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}_a] + \Gamma^{(1)}[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}_a] \quad (1.15a)$$

donde

$$\Gamma^{(1)}[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}_a] = -i\hbar \ln \left[ \int d\varphi_a \exp i \left\{ \hat{S}_{mat}[\varphi_a] - \left( \varphi_a \cdot \frac{\delta \Gamma^{(1)}}{\delta \bar{\phi}_a} \right) \right\} \right] \quad (1.15b)$$

siendo

$$\hat{S}_{mat}[\varphi_a] = S_{mat}[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}_a + \varphi_a] - S_{mat}[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}_a] - \left( \frac{\delta S_{mat}}{\delta \bar{\phi}} \right)_{\bar{\phi}_a} \varphi_a \quad (1.15c)$$

también puede entenderse como una aproximación de primer orden en un desarrollo en  $1/N$  de una teoría más completa. Esta teoría "aproximada" (o truncada) es la llamada teoría cuántica de campos en el espacio tiempo curvo.

Una vez convencidos del sentido que tiene estudiar esta teoría podemos preguntarnos cuán importantes serán los fenómenos descritos por ella. Siguiendo a Birrell y Davies (1982) podríamos decir que los efectos gravitatorios no triviales ocurrirán para modos con longitud de onda  $\lambda$  comparable con alguna longitud característica del espacio tiempo de fondo. Si tomamos como longitud característica de los fenómenos cuánticos ordinarios a una del orden de  $10^{-13}$  cm (o un tiempo del orden de  $10^{-20}$  seg) observamos que los efectos de la teoría de campos en el espacio-tiempo curvo serán importantes sólo en las proximidades de un agujero negro (donde el campo gravitatorio se vuelve sumamente intenso) o bien en el universo primitivo (cuando la curvatura del espacio tiempo era muy grande). Por otra parte la teoría de campos en el espacio tiempo curvo nos permitirá también analizar las cosas desde el punto de vista de observadores no inerciales en un espacio plano. Es conocido el fenómeno de

relatividad del vacío: un observador acelerado detecta partículas cuando el estado del sistema es el vacío para un observador inercial. Bajo ciertas condiciones el espectro de partículas detectadas puede corresponder a una distribución Planckiana caracterizada por una temperatura. Lógicamente la aceleración necesaria para detectar experimentalmente este fenómeno es muy grande (una temperatura del orden de  $1^\circ\text{K}$  corresponde a una aceleración del orden de  $2.4 \cdot 10^{20} \text{ m/s}^2$ ). A pesar de esto recientemente ha habido algunas discusiones sobre la posibilidad de detectar este efecto asociado a la aceleración de partículas en los anillos de los grandes aceleradores. Se especula que la despolarización parcial que sufren los electrones que giran en los anillos de un acelerador puede deberse al efecto térmico asociado a la aceleración. Sin embargo los resultados no son todavía concluyentes y el tema se encuentra aún en discusión (ver los trabajos de Bell y Leinaas (1983 y 1986) y Bell, Hughes y Leinaas (1985).

Finalmente esta teoría nos servirá también para estudiar los efectos que aparecen a causa de la existencia de una topología no trivial, el más conocido de los cuales es el "efecto Casimir".

## 1.2 Cálculo de la Acción Efectiva y Renormalización.

Trabajaremos aquí con un campo escalar real con una acción clásica  $S_{\text{mat}}$  definida de la siguiente forma:

$$S_{mat} = - \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right\} \quad (1.16)$$

donde

$$V(\phi) = (m^2 + \xi R) \frac{\phi^2}{2} + V(\phi) \quad (1.17)$$

Veremos como se puede calcular la contribución de un loop a la acción efectiva mediante el uso de las expresiones (1.11) y (1.12). Si el campo es libre, i.e. el potencial  $V$  es cuadrático en  $\phi$ , la expresión obtenida será exacta (la aproximación de un loop es exacta en ese caso). Como es sabido nos encontraremos en nuestro camino con cantidades infinitas que deberemos regularizar. Utilizaremos aquí el método de regularización dimensional (Bollini y Giambiaggi, 1972). Trabajaremos en consecuencia en un espacio tiempo de dimensión  $n$  (arbitraria).

Para utilizar la expresión (1.12) hay que obtener una forma explícita para el propagador de Feynmann definido como aquél que es solución de la siguiente ecuación:

$$\left\{ \square_x - (m^2 + \xi R + \frac{1}{2} V''(\bar{\phi})) \right\} G_F(x, x') = \delta(x, x') \quad (1.18a)$$

donde:  $"' " = \frac{d}{d\phi}$

El cálculo de este propagador no ofrece mayores dificultades en el espacio de Minkowski si  $\bar{\phi} = \text{constante}$ . Sin embargo si uno pretende hacerlo en un espacio tiempo curvo o bien en el espacio plano pero

para una configuración de  $\bar{\phi}$  no constante (con el objeto de calcular los distintos términos en la expansión (1.8)) el problema no es sencillo. La técnica más popular para encarar la solución de este problema es la que se conoce con el nombre de desarrollo de Shwinger-DeWitt (S-D). Este desarrollo (que es una extensión hecha por DeWitt (1964) al método del tiempo propio propuesto por Shwinger (1951)) consiste en escribir al propagador de la siguiente manera:

$$G(x, x') = \int_0^\infty ds K(x, x', s) \quad (1.19)$$

donde el núcleo  $K(x, x', s)$  satisface una ecuación tipo Schroedinger (donde  $s$  juega el papel de un "tiempo propio")

$$i \frac{\partial K}{\partial s} = \left( \square_x - m^2 - \xi R - \frac{1}{2} V''(\bar{\phi}) \right) K \quad (1.20)$$

cumpliéndose la siguiente condición de contorno:

$$K(x, x', s=0) = \delta(x, x') \quad (1.21)$$

Lo esencial del método es proponer para el núcleo  $K(x, x', s)$  una expresión del siguiente tipo:

$$K(x, x', s) = \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{(4\pi i s)^{n/2}} \Omega(x, x', s) \exp i \left\{ \frac{\sigma(x, x')}{2s} - s f(x, x') \right\} \quad (1.22)$$

donde:

$\Delta(x, x')$  es el determinante de Van-Vleck-Morette (ver Apéndice

(1.8) son, por ejemplo: Barbitskii y Vilkovitski, 1987, Zuk, 1986, 1987).

Presentaremos aquí los resultados que se obtienen de seguir un camino que bien puede considerarse "combinación lineal" de los emprendidos por Parker y Toms (1985 b) y Guven (1987). Tomaremos como función  $f$  a una que verifique que

$$[f] = m^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)R + \frac{1}{2}V''(\bar{\phi})$$

y veremos que, como es de esperar, los coeficientes del desarrollo (1.23) no dependen explícitamente ni de  $R$  ni de  $\bar{\phi}$  (calcularemos explícitamente los tres primeros coeficientes y veremos que eso es lo que ocurre). El cálculo no presenta mayores dificultades conceptuales y dado que podemos aprovechar los resultados de los trabajos anteriores las dificultades técnicas no son grandes. Sin embargo creemos de interés hacerlo ya que permite analizar con mayor generalidad algunas cuestiones interesantes (por ejemplo la dependencia con la curvatura de los términos "cinéticos" en (1.8)).

Reemplazando la forma elegida para  $f$  en (1.22) y tomando el límite de coincidencia se obtienen fácilmente los siguientes resultados para  $k=0$  y  $k=1$  (hacen falta los resultados para los límites de coincidencia de las derivadas de  $\phi$  y del determinante  $\Delta(x, x')$  que se encuentran en el Apéndice).

$$[\Omega_1] = 0 \quad (1.25a)$$

$$[\Omega_2] = \frac{1}{6} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) \square R + \frac{1}{180} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) - \frac{1}{6} \square V''(\bar{\phi}) \quad (1.25b)$$



La evaluación de  $[\Omega_3]$  es un poco más tediosa y luego de un largo cálculo se obtiene

$$\begin{aligned}
 [\Omega_3] = & -\frac{1}{7!} (-18 \square^2 R + 17 R_{,\mu} R^{,\mu} - 2 R_{\mu\nu;\lambda} R^{\mu\nu;\lambda} - 4 R_{\mu\nu;\lambda} R^{\mu\lambda;\nu} + \\
 & + 9 R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} R^{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} - 8 R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} - 24 R_{\mu\nu} R^{\mu\lambda;\nu}{}_{,\lambda} + \\
 & + 12 R_{\alpha\beta\gamma\delta} \square R^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{208}{9} R_{\mu\nu} R^{\mu\lambda} R_{\lambda}{}^{\nu} - 64 R^{\alpha\beta} R_{\alpha}{}^{\nu} R_{\nu\beta}{}^{\lambda} \quad (1.25c) \\
 & + \frac{16}{3} R_{\alpha\beta} R^{\alpha}{}_{\lambda\sigma} R^{\beta\lambda\sigma} - \frac{44}{9} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\lambda\sigma} R^{\gamma\delta}{}_{\lambda\sigma} - \frac{88}{9} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\lambda\gamma\sigma} R^{\beta\delta}{}_{\lambda\sigma} \\
 & - \frac{1}{360} (63 \square^2 R + 30 \square^2 R_{,\mu} R^{,\mu} - 43 R^{\mu\nu} R_{;\mu\nu} - 12 \square R_{,\mu} R^{,\mu}) + \\
 & + \frac{1}{12} V''_{,\alpha} V''^{,\alpha} - \frac{7}{270} R_{\mu\nu} V''^{,\mu} V''^{,\nu} - \frac{1}{60} \square^2 V'' + \frac{1}{6} (\frac{7}{2} - \frac{3}{10}) R_{,\mu} V''^{,\mu}
 \end{aligned}$$

Podemos comparar los valores de estos coeficientes con los obtenidos por Parker y Toms (1985 b):

$$[\Omega_1] = [\Omega_1]_{PT} = 0 \quad (1.26a)$$

$$[\Omega_2] = [\Omega_2]_{PT} - \frac{1}{6} \square V'' \quad (1.26b)$$

$$\begin{aligned}
 [\Omega_3] = & [\Omega_3]_{PT} + \frac{1}{12} V''_{,\alpha} V''^{,\alpha} - \frac{7}{270} R_{\mu\nu} V''^{,\mu} V''^{,\nu} \quad (1.26c) \\
 & - \frac{1}{60} \square^2 V'' + \frac{1}{6} (\frac{7}{2} - \frac{3}{10}) R_{,\mu} V''^{,\mu}
 \end{aligned}$$

Conocidos los coeficientes del desarrollo (1.23) podemos abocarnos al cálculo de la acción efectiva usando la siguiente representación para el  $\ln G(x, x')$  (ver Birrell y Davies, 1982):

$$\ln G(x, x') = \int_0^\infty \frac{ds}{s} K(x, x'; s) \quad (1.27)$$

Las integrales en  $s$  dan lugar a funciones gamma siendo el resultado de

la traza del logaritmo el siguiente:

$$\Gamma^{(1)}[g_{\mu\nu}, \bar{\phi}] = \frac{1}{2(4\pi)^{n/2}} \int d^n x \sqrt{-g} \left( \frac{[f]}{\mu^2} \right)^{\frac{n-4}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k \geq 0} [\Omega_k] \Gamma(k - \frac{n}{2}) [f]^{2-k} \right\} \quad (1.28)$$

donde  $\mu$  es un parámetro arbitrario, con dimensiones de masa, que es necesario incluir para que las unidades de la función  $f$  sean las naturales en cualquier dimensión y la acción sea adimensional. De la ecuación anterior se ve claramente que  $\Gamma^{(1)}$  es divergente en 4 dimensiones. También queda claro que (1.28) da un resultado finito si la dimensión del espacio tiempo es impar. Para evaluar esta expresión en  $n=4$  desarrollamos las funciones  $\Gamma(k - n/2)$  para  $k=0,1,2$  (que tienen polos en  $n=4$ ) y usamos el conocido desarrollo de  $([f]/\mu^2)^{\frac{n-4}{2}}$  obteniendo:

$$\Gamma^{(1)}[g_{\mu\nu}, \bar{\phi}] = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int d^n x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \ln \frac{[f]}{\mu^2} + \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \left( \frac{4 [f]^2}{n(n-2)} + [\Omega_2] \right) + \sum_{k \geq 3} \frac{(k-3)!}{32\pi^2} \int d^n x \sqrt{-g} \frac{[\Omega_k]}{[f]^{k-2}} + \mathcal{O}(n-4) \quad (1.29a)$$

(donde  $\gamma$  es la cte de Euler que puede hacerse desaparecer mediante una redefinición del parámetro  $\mu$  ).

Finalmente, la acción efectiva calculada a 1 loop (teniendo en cuenta (1.15a) es:

$$\Gamma[g_{\mu\nu}, \bar{\phi}] = S_{\text{grav}}[g_{\mu\nu}] + S_{\text{mat}}[g_{\mu\nu}, \bar{\phi}] + \Gamma^{(1)}[g_{\mu\nu}, \bar{\phi}] \quad (1.29b)$$

Para renormalizar la acción efectiva usamos las técnicas habituales. Las constantes que aparecen en todas las expresiones anteriores son llamadas "constantes desnudas" ( $\kappa_D, \Lambda_D, \epsilon_{iD}, m_D^2, \dots$ ). El proceso de renormalización puede entenderse como una "reparametrización" de la teoría. Las constantes desnudas pueden escribirse todas como  $\alpha_D = \alpha_r + \delta\alpha$  (por  $\alpha$  entendemos una constante cualquiera de las que aparecen en (1.29b)) donde  $\delta\alpha$  es un "contratérmino" (que es de orden  $\hbar$  y depende del parámetro regulador que en nuestro caso es la dimensión del espacio-tiempo) que se elige de manera tal que las divergencias que aparecen cuando  $n \rightarrow 4$  en (1.29b) se cancelen. La manera de cancelar los infinitos en los contratérminos no es única y debe adoptarse en consecuencia una "prescripción de renormalización". Por ejemplo la llamada "prescripción mínima" consiste en proponer que los contratérminos cancelen solamente la parte divergente en la expresión (1.29a) (el polo en  $n=4$ ). Usaremos aquí este criterio que por otra parte conduce a definir contratérminos que no dependen de la posición. Más adelante (en el Capítulo 4) haremos referencia a otras posibles prescripciones de renormalización).

Para poder implementar este método es imprescindible que las contribuciones divergentes provenientes de (1.29) tengan la misma forma funcional que los términos que originalmente aparecen en la acción clásica. Observando la forma de (1.29) vemos que el residuo en  $n=4$  contiene a  $[\Omega_2]$  y a  $[f]^2$ . Debido a la presencia de  $[\Omega_2]$

debemos incluir términos cuadráticos en la curvatura en la acción original (1.1). La contribución de  $[f]^2$  sólo tiene la propiedad requerida para ciertas formas del potencial de autointeracción. Es inmediato observar que si  $V(\phi)$  contiene términos con potencias de  $\phi$  mayores que la cuarta, la teoría no resulta renormalizable (ya a este orden). Este resultado es, por supuesto, conocido en el espacio-tiempo plano (ver por ejemplo Ramond (1981)) y también en el espacio curvo (Bunch y Panangaden (1980), Bunch et al. (1980), Bunch (1981)) pero dentro del marco del presente formalismo aparece de una manera muy sencilla (en los trabajos de Bunch et al 1980 a y b, se demuestra en general la renormalizabilidad de la teoría  $\lambda \phi^4$  a todo orden en  $\hbar$  y en el espacio-tiempo curvo).

Presentaremos en detalle los cálculos para la teoría  $V(\phi) = \frac{\lambda \phi^4}{4!}$ . Los contraterminos de todas las constantes resultan ser:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta(\kappa^{-1}) &= \frac{m^2 (\zeta - 1/6)}{2\pi^2 n (\frac{n}{2} - 1)(n-4)} ; & \delta(\Lambda \kappa^{-1}) &= \frac{-m^4}{8\pi^2 n (\frac{n}{2} - 1)(n-4)} \\
 \delta \epsilon_1 &= \frac{(\zeta - 1/6)^2}{8\pi^2 n (\frac{n}{2} - 1)(n-4)} ; & \delta \epsilon_2 &= -\delta \epsilon_3 = \frac{1}{2880\pi^2 (n-4)} \\
 \delta m^2 &= \frac{-m^2 \lambda}{4\pi^2 n (\frac{n}{2} - 1)(n-4)} ; & \delta \zeta &= \frac{-(\zeta - \frac{1}{6}) \lambda}{4\pi^2 n (\frac{n}{2} - 1)(n-4)} \\
 \delta \lambda &= \frac{-3\lambda^2}{4\pi^2 n (\frac{n}{2} - 1)(n-4)}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Observamos que para una teoría libre no hay renormalización de la masa ni de la constante  $\zeta$  y que la renormalización de las constantes puramente gravitatorias no depende de  $\lambda$ . Observamos también que en dimensión 2 (esto puede verse de (1.28)) no hacen falta

contratérminos para  $\epsilon_1, \epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  (y por lo tanto los correspondientes términos cuadráticos en la acción gravitatoria pueden no ponerse).

Si reescribimos la ecuación (1.29b) y definimos la "constante gravitatoria efectiva" como aquel término que acompaña a  $\sqrt{-g} R$  en la acción efectiva, concluimos que:

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)_{ef} = \frac{1}{\kappa_r} - \frac{(3-\frac{1}{6})m^2}{8\pi^2} \ln \left( \frac{m^2 + (3-\frac{1}{6})R + \lambda \bar{\phi}^2/2}{\mu^2} \right) \quad (1.31a)$$

análogamente la constante cosmológica efectiva es:

$$\left(\frac{\Lambda}{\kappa}\right)_{ef} = \frac{\Lambda_r}{\kappa_r} + \frac{m^4}{32\pi^2} \ln \left( \frac{m^2 + (3-\frac{1}{6})R + \lambda \bar{\phi}^2/2}{\mu^2} \right) \quad (1.31b)$$

La escala  $\mu$  debe ser fijada estableciendo las condiciones en las que se miden las constantes arriba mencionadas. En las anteriores expresiones esta implícito el hecho de que mediremos todas las constantes en las mismas condiciones pero evidentemente eso no es necesario (si quisiéramos fijar una escala distinta para medir cada constante debemos modificar los contratérminos en una parte finita). Puede resultar natural definir  $\mu = m$  con lo cual los valores de  $\kappa_r, \Lambda_r$ , etc. son los medidos en el límite de curvatura nula y  $\bar{\phi} = 0$  (es decir  $\kappa_r = \kappa_{ef}(R=0, \bar{\phi}=0)$ , etc). Esta última prescripción evidentemente no servirá para el caso  $m=0$  (ver Capítulo 4). Las ecuaciones (1.31) nos dicen cómo dependen de la curvatura las "constantes de acoplamiento efectivas".

Es interesante comentar la relación que tienen estos resultados con los que se obtienen aplicando las técnicas del grupo de renormalización. Estas técnicas fueron aplicadas al estudio de teorías de campos en el espacio-tiempo curvo por Nelson y Panangaden (1982), Toms (1983) y otros (ver Figueirido y Castagnino, 1985). En el espacio plano las ecuaciones del grupo de renormalización nos permiten conocer la dependencia de las constantes efectivas (y las funciones de Green) de la teoría con la escala de momentos. En el espacio curvo no hay una definición natural de momento y en consecuencia no es trivial cómo generalizar este procedimiento. Nelson y Panangaden argumentaron que la analogía natural del cambio de escala de momentos  $p \rightarrow ps$  es el reescalamiento de la métrica de fondo según  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}/s$ . El límite  $s \rightarrow \infty$  corresponde en el espacio plano al de altas energías pero en el espacio curvo corresponde al de alta curvatura.

Las ecuaciones del grupo de renormalización se obtienen fácilmente tomando la ecuación (1.29b), derivando respecto de  $\mu$  e imponiendo que el resultado debe ser nulo. Observando la forma explícita de  $\Gamma[\phi]$  y reagrupando los términos, salen ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de  $\alpha(\mu)$  donde  $\alpha$  es cualquiera de las magnitudes físicas de la teoría. Estas ecuaciones resultan ser en nuestro caso las siguientes:

$$\begin{aligned} \mu d_\mu m^2 &= \frac{\lambda m^2}{16\pi^2} & ; & \quad \mu d_\mu K^{-1} = \frac{m^2}{8\pi^2} \\ \mu d_\mu \xi &= \frac{\lambda(3-1/6)}{16\pi^2} & ; & \quad \mu d_\mu (1/K^{-1}) = -\frac{m^4}{32\pi^2} \\ \mu d_\mu \lambda &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} & ; & \quad \mu d_\mu \epsilon_1 = -\frac{(3-1/6)^2}{16\pi^2} \\ & & & \mu d_\mu \epsilon_1 = -\mu d_\mu \epsilon_2 = \frac{1}{1440\pi^2} \end{aligned}$$

Para obtenerlas a partir de (1.29b) hay que tener en cuenta que al derivar  $\Gamma^{(n)}[\bar{\phi}]$  solamente debemos considerar la dependencia explícita con  $\mu$  (a través del logaritmo) ya que lo demás da lugar a una contribución que es de orden  $\hbar^2$ . Una vez integradas estas ecuaciones (ver por ejemplo Parker y Toms, 1985 b) se observa típicamente el siguiente resultado para la dependencia de la constante cosmológica con  $\mu$  (las demás constantes de la teoría tienen dependencias con  $\mu$  cualitativamente análogas):

$$\Lambda(\mu) = \Lambda_0 + A \ln \frac{\mu}{\mu_0}$$

donde  $A$  es una constante. De esta expresión, de acuerdo a lo que antes dijimos, se puede leer el comportamiento de las ctes renormalizadas para altas curvaturas reescalando  $\mu \rightarrow \mu_5$ . Como vemos, comparando con la forma de  $\Lambda_{ef}$  en (1.31) el resultado es similar. Esto quiere decir que el uso de la versión modificada del desarrollo de S-D para calcular  $\Gamma^{(n)}[\bar{\phi}]$  permite obtener el correcto comportamiento de las constantes "corredoras" en el límite de altas curvaturas sin necesidad de recurrir al uso de las ecuaciones del grupo de renormalización.

La dependencia de las constantes de acoplamiento con la curvatura fue estudiada ultimamente por varios autores. Calzetta, Jack y Parker (1986 a, b) analizaron una teoría de gauge observando la existencia del fenómeno de libertad asintótica inducida por la curvatura que tendría importancia también para escalas bastante menores a la de Planck. Por otra parte Parker y Toms (1986) discuten la importancia de la dependencia de la constante cosmológica efectiva con la curvatura: si

se encontraran presentes muchos campos las contribuciones de todos ellos se sumarían en (1.31) y el comportamiento de  $\Lambda_{ef}$  estaría dominado por la contribución correspondiente a la partícula más pesada. Tomando  $\Lambda_r=0$  (para lograr que se cumpla  $\Lambda_{ef}(R=0)=0$ ) se observa que para  $R$  grande este término puede producir, a través de las ecuaciones de Einstein, la existencia de una etapa inflacionaria en la expansión del universo (sin necesidad de ninguna transición de fase). Por otra parte, de imponer que la contribución de  $\Lambda_{ef}(R)$  a la evolución actual del universo no modifique el comportamiento conocido del mismo, se obtiene una cota para la masa de la partícula más pesada que resulta ser del orden de  $10^{19}$  GeV.

Antes del descubrimiento de la nueva forma del desarrollo de S-D, el estudio del comportamiento de las constantes de acoplamiento para altas curvaturas fue analizado para algunas teorías Gran Unificadas mediante el uso de las técnicas del grupo de renormalización (ver Parker y Toms, 1984 y Calzetta, 1986).

Por último, observando la expresión (1.29b) podemos escribir a la acción efectiva (a un loop) de manera de poder identificar claramente al potencial efectivo y a cada uno de los términos que aparecen en el desarrollo del tipo (1.8). En efecto, la ecuación (1.29b) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Gamma[g_{\mu\nu}, \bar{\phi}] = & \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} \left\{ \frac{R - 2\Lambda_{ef}}{K_{eff}} - \epsilon_{1ef} R^2 - \epsilon_{2ef} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \epsilon_{3ef} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right\} + \\ & + \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{Z^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \bar{\phi} + Z^\mu \partial_\mu \bar{\phi} - V_{ef}(\bar{\phi}) + (\text{términos en} \right. \\ & \left. \text{derivadas superiores de } \bar{\phi}) \right\} \end{aligned} \quad (1.32)$$



donde las constantes gravitatorias efectivas son aquéllas que definiéramos en (1.31) (la forma de las  $\zeta_{\text{ef}}$  es análoga a la de las dadas en (1.31)). Para escribir la expresión del potencial efectivo debemos tener en cuenta que todos los términos de la serie que aparece en (1.29a) contribuyen al mismo. La expresión final resulta ser la siguiente:

$$V_{\text{ef}}(\bar{\phi}) = (m^2 + \zeta R^2) \frac{\bar{\phi}^2}{2} + \frac{\lambda \bar{\phi}^4}{4!} + \frac{\lambda \bar{\phi}^2}{64\pi^2} \left( m^2 + \left(\zeta - \frac{1}{6}\right)R + \frac{\lambda \bar{\phi}^2}{2} \right) \cdot \ln \left( \frac{m^2 + \left(\zeta - \frac{1}{6}\right)R + \frac{\lambda \bar{\phi}^2}{2}}{\mu^2} \right) - \sum_{k \geq 3} \frac{(k-3)!}{32\pi^2} \frac{[\Sigma_k]}{\left( m^2 + \left(\zeta - \frac{1}{6}\right)R + \frac{\lambda \bar{\phi}^2}{2} \right)^{k-2}} \quad (1.33a)$$

Es interesante destacar la existencia de términos "cinéticos" que en el espacio plano no están presentes (a estos términos cinéticos también contribuyen los distintos sumandos de la serie):

$$Z^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left( 1 + \frac{\lambda^2 \bar{\phi}^2}{192\pi^2 (m^2 + (\zeta - \frac{1}{6})R + \frac{\lambda \bar{\phi}^2}{2})} \right) + \frac{7\lambda R^{\mu\nu}}{4320\pi^2 (m^2 + (\zeta - \frac{1}{6})R + \frac{\lambda \bar{\phi}^2}{2})} + \dots \quad (1.33b)$$

$$Z^\mu = \frac{\lambda \bar{\phi} R'^\mu}{1440\pi^2 (m^2 + (\zeta - \frac{1}{6})R + \frac{\lambda \bar{\phi}^2}{2})} + \dots$$

Estas expresiones generalizan el trabajo de Coleman y Weinberg (1973) al espacio-tiempo curvo y coinciden en parte con los resultados hallados por Hu y O'Connor (1984) y por Guven (1987). En los trabajos de Hu y sus colaboradores se calculan las correcciones a los términos cinéticos en la acción efectiva usando la técnica del espacio de

momentos local (de Bunch y Parker (1979)). Sin embargo al no usarse un desarrollo tipo S-D modificado, no aparecen las correcciones logarítmicas en la curvatura que nosotros obtenemos tanto en el potencial efectivo como en las constantes gravitatorias efectivas (recordemos que estos términos son los que dominan el comportamiento de las constantes efectivas para altas curvaturas). Debido a que esos autores trabajan a un orden mas bajo que nosotros, tampoco obtienen la forma explícita de los nuevos términos cinéticos que encontramos en (1.33b). El objetivo principal de los trabajos que recién mencionamos está orientado a hacer una formulación mas consistente del modelo inflacionario del universo primitivo para lo cual es importante el conocimiento de la acción efectiva. Volveremos a referirnos a este punto en el capítulo 4.

Finalmente es interesante hacer una observación acerca de las contribuciones divergentes en (1.29). Como vemos, los términos que aportan divergencias son los tres primeros del desarrollo de S-D ( $k=0,1,2$ ). Para campos libres, el factor que aparece en el logaritmo es constante y en consecuencia, el cálculo de acción efectiva renormalizada puede hacerse de la siguiente manera:

$$\Gamma^{ren}[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}] = \Gamma[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}] - \Gamma^{(4)}[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}] \quad (1.34)$$
 donde  $\Gamma^{(4)}$  es la que se obtiene mediante el uso de las expresiones (1.11) y (1.12) poniendo en  $G_F(x,x')$  solamente los tres primeros términos del desarrollo de S-D. Otra forma de pensar el calculo de  $\Gamma^{(ren)}$ , que es evidentemente análoga a la anterior, es la siguiente: la acción efectiva renormalizada se calcula con el uso de (1.11.a) y (1.12) usando el propagador de Feynmann renormalizado que es el que se

obtiene sustrayendo los tres primeros terminos del desarrollo de S-D. Usando el desarrollo de S-D usual, es decir aquel que se obtiene tomando  $[f]=m^2$ , y definiendo el orden adiabático de un término como el numero de derivadas de la métrica que aparecen en él (por ejemplo R es de segundo orden,  $R^2$  de cuarto al igual que  $\square R$ , etc) podemos comprobar que (para campos libres) el término  $[\Omega_k]$  resulta ser de orden adiabático  $2k$ . En consecuencia podemos verificar que las divergencias en la acción efectiva están producidas por los términos de hasta cuarto orden adiabático en el propagador.

### 1.3 Las Ecuaciones Efectivas y el Tensor de Energía-momento.

Antes de concluir el capítulo nos referiremos a las ecuaciones de campo efectivas obtenidas mediante el uso de las expresiones (1.4). En primer lugar, es importante destacar que estas ecuaciones no son ecuaciones para valores medios sino para elementos de matriz. Como vimos al comienzo, las configuraciones  $\bar{\phi}_a$  que hacen extrema a la funcional  $\Gamma[\bar{\phi}_a]$  pueden interpretarse como

$$\bar{\phi}_a = \frac{\langle A | \phi | A' \rangle}{\langle A | A' \rangle} \quad (1.35)$$

Habitualmente se tomarán los estados  $|A\rangle$  y  $|A'\rangle$  como aquellos que corresponden a la noción de vacío sobre las hipersuperficies  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ : En el espacio plano y en ausencia de corrientes es lícito

tomar

$$|vacío, in\rangle = |vacío, out\rangle$$

Sin embargo es bien sabido, que aun cuando las corrientes sean nulas, en general no es válido suponer que los estados de vacío IN y OUT son el mismo si trabajamos en un espacio curvo (ya que la métrica, tomada como un campo de fondo, puede crear partículas).

Al no ser  $\bar{\phi}_a$  valores medios sino elementos de matriz, pueden tomar valores complejos. También la acción efectiva  $\Gamma[\bar{\phi}]$  puede ser compleja. En efecto, la parte imaginaria de  $\Gamma$  da una medida de la probabilidad total de creación de partículas. Esto puede verse teniendo en cuenta que por su definición la acción efectiva satisface

$$\langle vacío, in | vacío, out \rangle_{J=0} = e^{i\Gamma} \quad (1.36)$$

De esta expresión se deduce que la probabilidad de que se creen partículas es:

$$\begin{aligned} P &= 1 - |\langle vacío, in | vacío, out \rangle|^2 \\ &= 1 - e^{-2\text{Im}\Gamma} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Hay algunos trabajos donde se ha usado este enfoque para calcular el número de partículas creadas por la expansión del universo en especial en métricas no isótropas (ver los trabajos de Fischetti, Hartle y Hu (1979), Hartle y Hu (1979, 1980) y Hartle (1980, 1981)).

Surge la pregunta de si existe alguna formulación funcional alternativa que permita calcular valores medios y obtener ecuaciones efectivas para los mismos. Esta formulación existe y fue originariamente planteada por Schwinger (1961) y desarrollada en detalle por Keldish, (1964) y muchos otros. En el marco de la teoría de campos en el espacio tiempo curvo fue estudiada por Jordan, (1986) y posteriormente por Calzetta y Hu (1986, 1987). En el capítulo 4 utilizaremos otro método que nos permitirá encontrar ecuaciones de evolución para valores medios.

A partir de la expresión de la acción efectiva renormalizada se pueden derivar las ecuaciones de campo efectivas:

$$\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{\text{grav}}^{(\text{ren})}}{\delta g^{\mu\nu}} = - \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left\{ S_{\text{mat}}^{(\text{ren})} + \tilde{\Gamma}_{(1)}^{(\text{ren})} \right\} \quad (1.38)$$

donde con la abreviatura (ren) indicamos que todas las constantes que aparecen son las renormalizadas y por  $\tilde{\Gamma}_{(1)}^{(\text{ren})}$  entendemos a la expresión (1.29a) sin la contribución del polo en  $n=4$ .

Usando las identidades del apéndice podemos entonces escribir la ecuación de Einstein semiclásica que resulta ser:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_r} G_{\mu\nu} + \frac{\Lambda_r}{\kappa_r} g_{\mu\nu} + \epsilon_{1r} H_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon_{2r} H_{\mu\nu}^{(2)} + \epsilon_{3r} H_{\mu\nu} &= \\ &= \frac{\langle A | T_{\mu\nu} | A' \rangle_{\text{ren}}}{\langle A | A' \rangle} \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde

$$\frac{\langle A | T_{\mu\nu} | A' \rangle_{\text{ren}}}{\langle A | A' \rangle} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left\{ S_{\text{mat}}^{\text{ren}} + \tilde{\Gamma}_{(1)}^{(\text{ren})} \right\}$$

El término de fuente de estas ecuaciones es el elemento de matriz del tensor de energía momento renormalizado. Es interesante observar que los efectos cuánticos pueden provocar que este objeto tenga propiedades bien distintas que las del tensor de energía momento clásico definido según:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{\text{matt}}}{\delta g^{\mu\nu}} = (1-2\xi) \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} + (2\xi - \frac{1}{2}) g_{\mu\nu} \phi_{;\rho} \phi^{;\rho} \quad (1.40)$$

$$- 2\xi \phi \phi_{;\mu\nu} + 2\xi g_{\mu\nu} \phi \square \phi +$$

$$+ \left[ \xi (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) - \frac{g_{\mu\nu}}{2} m^2 \right] \phi^2 - g_{\mu\nu} V(\phi)$$

Es bien conocida la existencia de la "anomalía de traza". Si consideramos un campo libre ( $V(\phi) = 0$ ) con acoplamiento conforme con la curvatura y masa nula ( $m=0$ ,  $\xi=1/6$ ) es fácil ver que la traza de  $T_{\mu\nu}$  es nula. Sin embargo podemos comprobar que la traza de  $\langle A | T_{\mu\nu} | A' \rangle_{\text{ren}}$  calculada a partir de la derivación de la acción efectiva renormalizada (tomando luego el límite de masa nula y  $\xi = 1/6$ ) resulta ser (ver por ejemplo Birrell y Davies (1982)):

$$\langle A | T_{\mu}^{\mu} | A' \rangle_{\text{ren}} = - \frac{[\Omega_2]}{16\pi^2} \quad (1.41)$$

Este resultado puede obtenerse fácilmente de la expresión de  $\Gamma[g_{\mu\nu}, \phi]$  si usamos el siguiente razonamiento: Para calcular la traza de las ecuaciones gravitatorias de movimiento debemos derivar funcionalmente  $\Gamma$  respecto de  $g_{\mu\nu}$  y luego contraer el resultado. Sin

embargo, podemos evitarnos el trabajo de hacer una derivada funcional si utilizamos la siguiente igualdad (que es consecuencia de la regla de derivación de una funcional de una función):

$$\int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma}{\delta g^{\mu\nu}} = \left. \frac{\partial \Gamma[a g_{\mu\nu}]}{\partial a} \right|_{a=1} \quad (1.42)$$

donde  $a$  es una constante. Es fácil comprobar que, si transformamos la métrica según  $g_{\mu\nu} \rightarrow a g_{\mu\nu}$ , las siguientes reglas de transformación son válidas:

$$\left. \begin{aligned} g^{\mu\nu} &\rightarrow a^{-1} g^{\mu\nu} \\ \sqrt{g} d^4x &\rightarrow a^2 \sqrt{g} d^4x \\ R &\rightarrow a^{-1} R \\ [\Omega_2] &\rightarrow a^{-2} [\Omega_2] \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Reemplazando la ecuación (1.29b) en (1.42), usando las identidades (1.43) y tomando el límite  $m \rightarrow 0$  y  $\xi \rightarrow 1/6$  luego de hacer la derivada respecto de  $a$ , se obtiene:

$$\left. \frac{\partial \Gamma[a g_{\mu\nu}]}{\partial a} \right|_{a=1} = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{2\Lambda - R}{2\kappa} - \frac{\epsilon_1}{2} H_\mu^\mu - \frac{\epsilon_2}{2} H_\mu^{(2)\mu} - \right. \\ \left. - \frac{\epsilon_3}{2} H_\mu^\mu + \frac{[\Omega_2]}{32\pi^2} \right\} \quad (1.44)$$

De esta ecuación se deduce (1.41). Es interesante notar que aún en el caso de un campo interactuante la anomalía de traza también está dada por (1.41) si nos restringimos a la aproximación de 1 loop (donde debemos reemplazar la expresión correspondiente de  $[\Omega_2]$  dada en (1.25b)).

El surgimiento de la anomalía de traza, o en general de los términos de polarización de vacío, está relacionado evidentemente con el proceso de renormalización. Durante el mismo se introduce una escala que rompe la invariancia conforme de la teoría. En consecuencia, al obtener la acción renormalizada vemos que la misma no posee las simetrías de la acción original. Nos referiremos al papel de estos términos más adelante.



El surgimiento de la anomalía de traza, o en general de los términos de polarización de vacío, está relacionado evidentemente con el proceso de renormalización. Durante el mismo se introduce una escala que rompe la invariancia conforme de la teoría. En consecuencia, al obtener la acción renormalizada vemos que la misma no posee las simetrías de la acción original. Nos referiremos al papel de estos términos mas adelante.

En resumen: en este capítulo despues de referirnos a las características generales de la teoría cuántica de campos en el espacio tiempo curvo, presentamos el cálculo de la acción efectiva (a un loop) para una teoría  $\lambda \phi^4$ . Esto nos permitió discutir en detalle el método de renormalización que hace uso del desarrollo de S-D para el propagador. En éste capítulo no hay contribuciones originales destacables pese a que los cálculos antes mencionados no fueron hechos de la misma manera que en los trabajos que existen sobre el tema.

En el próximo capítulo nos concentraremos en la renormalización del tensor de energía momento.

## CAPITULO 2

## Renormalización del tensor de energía-momento.

## 2.1. Campos Libres y Renormalización de Hadamard

El cálculo de  $\langle A | T_{\mu\nu} | A' \rangle_{ren}$  a partir de la derivación funcional de la acción efectiva es, en general impracticable. Esto es así ya que sólo conocemos una expansión asintótica de la misma (en derivadas de la métrica de fondo (ver (1.29))). Hasta el momento, el único caso en el que se conocen expresiones mas o menos cerradas para  $\langle A | T_{\mu\nu} | A' \rangle_{ren}$  es el de los campos libres. Describiremos en este párrafo las técnicas usadas para estos cálculos. Pese a la simplicidad de la teoría libre, observaremos que la misma presenta problemas interesantes que deben ser resueltos antes de encarar una teoría más complicada. Por otra parte, el conocimiento detallado del método de trabajo con una teoría libre nos permitirá abordar el cálculo de la contribución de un loop para una teoría autointeractuante.

Para calcular directamente los elementos de matriz del operador  $T_{\mu\nu}$  conviene usar el formalismo de cuantificación canónica (ver por ejemplo Roman, 1968). Consideramos a los campos como operadores sobre un espacio de estados. Nos restringiremos por ahora a considerar campos escalares reales libres (descritos clásicamente por la acción (1.16) con  $V(\phi) = 0$ ). Los campos satisfacen clásicamente la ecuación de Klein Gordon, es decir:

$$(\square_x - m^2 - \not{\partial} R) \phi = 0 \quad (2.1).$$

Esta ecuación es lineal y por lo tanto podemos encontrar una base del espacio de soluciones a la que denotaremos por  $\{\phi_k(\bar{x}, t); \phi_k^*(\bar{x}, t)\}$  donde  $k$  será un conjunto de números que etiquetará a los elementos de la base. Elegiremos una base que sea ortonormal en el producto interno de Klein Gordon definido por:

$$(\phi, \psi) \equiv \int_{\Sigma} d\Sigma^\mu \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \quad (2.2)$$

Este producto tomado entre dos soluciones de la ecuación de K-G es independiente de la hipersuperficie  $\Sigma$  (si las funciones  $\phi$  y  $\psi$  se anulan en los confines de  $\Sigma$ ). La base es ortonormal si se cumplen las siguientes relaciones:

$$(\phi_k, \phi_{k'}^*) = 0$$

$$(\phi_k, \phi_{k'}) = -\delta(k, k')$$

donde con el símbolo  $\delta(k, k')$  denotamos cosas distintas según sea  $k$  discreto o continuo. En ambos casos lo que se debe satisfacer es la siguiente identidad:

$$\int d\mu(k) f(k) \delta(k, k') = f(k')$$

siendo  $d\mu(k)$  una medida en el espacio de los  $k$ .

El campo puede desarrollarse entonces según:

$$\phi(\bar{x}, t) = \int d\mu(k) (a_k \phi_k(\bar{x}, t) + a_k^\dagger \phi_k^*(\bar{x}, t)) \quad (2.3)$$

El método de cuantificación canónica consiste, como dijimos, en tomar a  $\phi$  como un operador. Este carácter operatorial de  $\phi$  se traduce en que los coeficientes del desarrollo del campo en la base elegida son operadores ( $a_k$  y  $a_k^\dagger$ ). La teoría se cuantifica imponiendo que los operadores  $a_k$  y  $a_k^\dagger$  cumplan las reglas de conmutación canónicas que los convierten en operadores de creación y destrucción (lo que es equivalente a pedir que el campo y su derivada cumplan las reglas de conmutación canónicas equitemporales), estas son:

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}] &= 0 = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] \\ [a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta(k, k') \end{aligned} \quad (2.4)$$

El espacio de estados de la teoría (espacio de Fock) se construye a partir del estado de vacío definido como aquél que es aniquilado por todos los operadores de destrucción, es decir

$$a_k |0\rangle = 0 \quad \forall k$$

Evidentemente la elección de una determinada base para desarrollar el campo en (2.3) corresponde a la elección de un determinado estado de vacío sobre el que se construye el espacio de estados.

Elegido el estado de vacío, definimos al propagador  $G(x, x')$  de la siguiente manera:

$$G_1(x, x') = \langle 0 | \{ \phi(x), \phi(x') \} | 0 \rangle \quad (2.5)$$

$$\text{con } \{A, B\} = AB + BA$$

Reemplazando el desarrollo (2.3) en (2.5) se obtiene fácilmente que

$$G_1(x, x') = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int d\mu(k) \phi_k(x) \phi_k^*(x') \right\} \quad (2.6)$$

Podemos ver que el propagador  $G_1(x, x')$  es dependiente del vacío (o equivalentemente de la base usada en (2.3)). Para ver esto podemos proponer un cambio de base definido por las siguientes ecuaciones de transformación que nos vinculan la base  $\{\phi_k, \phi_k^*\}$  con la  $\{\psi_k, \psi_k^*\}$ :

$$\psi_k = \int d\mu(p) (\alpha_{kp} \phi_p + \beta_{kp} \phi_p^*) \quad (2.7)$$

Para asegurar la ortonormalidad de ambas bases los coeficientes de la transformación (llamada habitualmente transformación de Bogoliubov) deben satisfacer ciertas condiciones. Estas son:

$$\left. \begin{aligned} \int d\mu(p) (\alpha_{kp} \alpha_{k'p}^* - \beta_{kp} \beta_{k'p}^*) &= \delta(k, k') \\ \int d\mu(p) (\alpha_{kp} \beta_{k'p} - \alpha_{k'p} \beta_{kp}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Reemplazando la expresión (2.7) en (2.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} G_1(x, x') &= \tilde{G}_1(x, x') + 2 \operatorname{Re} \left\{ \int d\mu(k) d\mu(p) d\mu(e) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left( 2 \beta_{kp} \beta_{ke}^* \operatorname{Re}(\phi_p^*(x) \phi_e(x')) + \alpha_{ke} \beta_{kp}^* \phi_k(x) \phi_p(x') + \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_{kp}^* \beta_{ke} \phi_e^*(x) \phi_p^*(x') \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $\widetilde{G}_1(x, x')$  se calcula usando la ecuación (2.4) con la base  $\{\psi_k, \psi_k^*\}$ . De la misma manera puede demostrarse fácilmente que el propagador  $\Delta(x, x')$  definido como:

$$\Delta(x, x') = \langle [\phi(x), \phi(x')] \rangle$$

no depende del estado de vacío utilizado.

Una vez seleccionado un estado de vacío, el valor de espectación en dicho estado de cualquier forma bilineal en el campo y sus gradientes puede calcularse a partir de los límites de coincidencia del propagador y los de sus derivadas. En particular, el valor de espectación de vacío del  $T_{\mu\nu}$  definido en (1.40) se obtiene como:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle = \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \xi \right) (G_1; \mu' \nu + G_1; \mu \nu') + \left( \xi - \frac{1}{4} \right) G_1; \rho^{\rho'} g_{\mu\nu} \right. \\ \left. - \frac{\xi}{2} (G_1; \mu\nu + G_1; \mu' \nu') + \frac{\xi}{8} (G_1; \rho^{\rho} + G_1; \rho'^{\rho'}) g_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \xi (\xi R + m^2) G_1 g_{\mu\nu} + \frac{\xi}{2} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) G_1 - \right. \\ \left. - m^2 \frac{G_1}{2} g_{\mu\nu} \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

En esta última expresión aparecen derivadas en los puntos  $x$  y  $x'$ , lo cual es una complicación técnica. Sin embargo la misma puede ser transformada utilizando un teorema de Synge (1960) (generalizado por Christensen en 1976) en otra que contiene límites de coincidencia de expresiones con derivadas en uno de los dos puntos (ver Castagnino, Harari y Núñez, 1987). De esa forma se llega a:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{1}{2} [G_1; \mu\nu] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \xi \right) [G_1]; \mu\nu + \\ + \frac{1}{2} \left( \xi - \frac{1}{4} \right) g_{\mu\nu} \square [G_1] + \frac{\xi R_{\mu\nu}}{2} [G_1] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Si se intenta realizar este cálculo el resultado que se obtiene es evidentemente divergente. Si se trabaja siempre en  $n=4$  dimensiones, las divergencias aparecen en (2.11) al tomar el límite de coincidencia (el método de regularización por separación covariante de puntos, point-splitting, que fue introducido por Christensen en 1976 permite regularizar estas divergencias). El método de regularización dimensional, aplicado en este caso consistiría en trabajar en  $n$  dimensiones, calcular el límite de coincidencia en (2.11) y luego hacer  $n \rightarrow 4$  con lo que la expresión se vuelve divergente (haremos esto en el capítulo 4).

Teniendo en cuenta lo hecho en el Capítulo 1, estamos en condiciones de afirmar que las divergencias que aparecen en  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  podrán absorberse en una renormalización de las constantes desnudas de la teoría si son del mismo tipo de las que aparecen en el cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  que se hace usando la expresión (2.11) con  $G_{\mu\nu}(x, x') = G_{\mu\nu}^{SD(4)}(x, x')$  (donde la notación  $SD(4)$  indica que debemos retener las contribuciones de los tres primeros términos del desarrollo de Shwinger-DeWitt). Esto es así ya que las contribuciones divergentes a la acción efectiva provienen de esos términos.

Evidentemente, la imposición de que  $G_{\mu\nu}(x, x')$  de lugar al mismo tipo de divergencias en  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  que  $G_{\mu\nu}^{SD(4)}(x, x')$  implica una restricción sobre los posibles estados de vacío. Esta restricción es absolutamente necesaria ya que de otra forma no podremos renormalizar la teoría y extraer la información física de la misma. Nos referiremos en el Capítulo 3 a las consecuencias de estas restricciones sobre los posibles estados de vacío.

De lo dicho anteriormente se desprende la importancia de conocer la estructura divergente del propagador de Schwinger-DeWitt ya que los propagadores contruidos con todos los estados de vacío físicamente admisibles deben reproducirla (en algún sentido que precisaremos más adelante).

Es sabido que el propagador de S-D es una "solución elemental de Hadamard" de la ecuación de K-G. Este tipo de propagadores fueron estudiados por primera vez por Hadamard en 1952 y luego por DeWitt (1960) en el espacio-tiempo curvo. Una solución elemental de Hadamard es un biescalar, solución de la ecuación (2.1), que puede escribirse de la siguiente forma:

$$G_1^{Had}(x, x') = \mu(x, x') \left\{ \frac{2}{\sigma} + v(x, x') \ln \sigma \mu^2 + w(x, x') \right\} \quad (2.12)$$

( $\mu$  es una constante, con dimensiones de masa, que fija una escala arbitraria). Al imponer que (2.12) sea solución de la ecuación de Klein-Gordon se obtiene una ecuación de la que puede despejarse la función  $\mu(x, x')$  que resulta ser:

$$\mu(x, x') = N \Delta(x, x')$$

(donde  $N$  es una constante arbitraria que suele tomarse igual a  $1/8\pi^2$  para reproducir adecuadamente el límite minkowskiano: esto quiere decir que en el espacio de Minkowski el propagador  $G_1^{Had}(x, x')$  debe coincidir con el núcleo  $\Delta_1(x, x')$  asociado a las ondas planas). Si proponemos para  $v(x, x')$  y  $w(x, x')$  un desarrollo del tipo:

$$v(x, x') = \sum_{n \geq 0} v_n(x, x') \sigma^n \quad (2.13a)$$



$$W(x, x') = \sum_{n \geq 0} w_n(x, x') \sigma^n \quad (2.13b)$$

(donde  $v_n$  y  $w_n$  son funciones regulares en el límite  $x \rightarrow x'$ ), podemos leer a partir de la ecuación de campo las ecuaciones que deben satisfacer los "coeficientes" del desarrollo. Estas resultan ser:

$$v_0 + v_{0,\mu} \sigma'^\mu = M^2 - \Psi^{-1} \square \Psi \quad (2.14a)$$

$$n \geq 1 \quad v_n + \frac{v_{n,\mu} \sigma'^\mu}{n+1} = \frac{1}{2n(n+1)} \left\{ M^2 v_{n-1} - \Psi^{-1} \square (\Psi v_{n-1}) \right\} \quad (2.14b)$$

$$n \geq 1 \quad w_n + \frac{w_{n,\mu} \sigma'^\mu}{n+1} = \frac{1}{2n(n+1)} \left\{ M^2 w_{n-1} - \Psi^{-1} \square (\Psi w_{n-1}) \right\} - \quad (2.14c)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2n+1}{n(n+1)} v_n - \frac{1}{n(n+1)} v_{n,\mu} \sigma'^\mu \\ \text{con} \quad & M^2 = m^2 + \sum R \end{aligned}$$

Observamos que la función  $v(x, x')$  está enteramente determinada por el sistema (2.14) y que por lo tanto sólo depende de la geometría de fondo (y de los parametros presentes  $m^2$ , etc). No ocurre lo mismo con  $w(x, x')$  que sólo queda fijada cuando se elige una función  $w_0(x, x')$  la que resulta en consecuencia arbitraria. En realidad  $w_0(x, x')$  debe ser tal que  $w(x, x')$  resulte simétrica para que  $G_1(x, x')$  también lo sea. En los trabajos de Harari (1984) y Castagnino y Harari (1985) se estudian las condiciones que debe cumplir el biescalar  $w_0(x, x')$  para asegurar la simetría del propagador. Puede verse que de no ser simétrico el propagador, la expresión (2.8) conducirá a un tensor de energía momento no conservado. Las condiciones sobre  $w_0(x, x')$  que aseguran la conservación de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  son:

$$[w_{0,\alpha}] = [w_0]_{,\alpha} \quad (2.15a)$$

$$[w_{0;\alpha\beta}]^\beta - \frac{1}{4} [\square w_0]_{,\alpha} = \frac{1}{4} \square ([w_0]_{,\alpha}) + \frac{R_{\alpha\beta}}{12} [w_0]^{,\beta} \quad (2.15b)$$

$$+ \frac{(2-1/6) R_{,\alpha}}{4} [w_0] - \frac{1}{4} (m^2 + (2-1/6) R) [w_0]_{,\alpha} + \frac{1}{2} [\tau_1]_{,\alpha}$$

Notemos que estas condiciones son necesarias pero no suficientes para que  $G_1(x, x')$  sea simétrico pero son necesarias y suficientes para garantizar la validez de la ecuación  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_i^V = 0$ .

Como dijimos, puede verse que el propagador de S-D es una solución elemental de Hadamard. En efecto, si tomamos la expresión del propagador de Shwinger DeWitt (1.19) observamos que la misma puede reescribirse (en 4 dimensiones) como:

$$G_F^{SD}(x, x') = \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{16\pi^2} \sum_{n \geq 0} \Omega_n(x, x') \left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^n \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{i(\frac{\sigma}{2s} - fs)} \quad (2.16)$$

$$= - \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{8\pi^2} \sum_{n \geq 0} \Omega_n(x, x') \left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^n \left\{ f \frac{H_1^{(2)}((-2fs)^{1/2})}{(-2fs)^{1/2}} \right\}$$

donde  $H_1^{(2)}(z)$  es la función de Hankel de segunda especie y primer tipo. Para asegurar la validez de esta ecuación debemos pedir que la función  $f(x, x')$  contenga a la masa a través de un factor  $m^2$ , tal como ocurre en todos los casos mencionados en el capítulo 1.

El propagador  $G_1(x, x')$  puede obtenerse a partir del de Feynmann usando que  $G_1(x, x') = -2\text{Im}\{G_F(x, x')\}$ . Haciendo un desarrollo de la función de Hankel para  $\sigma$  chico se observa claramente de (2.16) la estructura de Hadamard. Pueden relacionarse de esta manera los

coeficientes  $v_n(x, x')$  con los del desarrollo de S-D. Se verifica la siguiente igualdad:

$$[v_n] = \frac{2}{n!} \left[ \frac{f}{2} \right]^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{[\Omega_j]}{[f]^{(n+1-j)}!} \tag{2.17}$$

Para obtener esta expresión no hemos especificado quién es la función  $f(x, x')$  (sólo necesitamos que tenga un factor  $m^2$ , tal como dijimos antes). De acuerdo a la función que elijamos tendremos que utilizar las correspondientes funciones  $\Omega_n(x, x')$ . Como consecuencia de la expresión (2.17) podemos afirmar que los límites de coincidencia de las funciones  $v_n(x, x')$  sólo dependen de  $m^2$  y de  $R$  a través de la combinación  $m^2 + (\frac{3}{2} - \frac{1}{6})R$  (este hecho no había sido notado en los trabajos anteriores y puede ser usado para facilitar las cuentas).

El propagador  $G_1^{sb}(x, x')$  es entonces una forma de Hadamard que está caracterizada por una función  $w_0(x, x')$  que resulta ser:

$$w_0^{sb} = w_0^\eta - \Omega_1 (2\gamma + \ln \frac{f}{2}) + \frac{\Omega_2}{f} + \frac{\Omega_3}{f} + \dots$$

con  $w_0^\eta = f (\ln \frac{f}{2} + 2\gamma - 1)$

Teniendo en cuenta las consideraciones hechas en el capítulo 1 podemos afirmar que el valor de espectación de vacío de  $T_{\mu\nu}$  renormalizado puede calcularse aplicando la fórmula (2.11) al propagador renormalizado  $G_1^{ren}(x, x')$ , siendo este objeto el obtenido mediante la siguiente expresión:

$$G_1^{ren}(x, x') = G_1(x, x') - G_1^{sb(4)}(x, x'). \tag{2.18}$$

Sin embargo como la estructura divergente de todos los propagadores de Hadamard es la misma, podríamos renormalizar el propagador de otra forma:

$$G_1^{ren}(x, x') = G_1(x, x') - G_1^{Had(4)}(x, x') \quad (2.19)$$

donde  $G_1^{Had(4)}(x, x')$  es la parte de hasta cuarto orden adiabático de cualquier solución de Hadamard simétrica (construida solamente a partir de elementos geométricos asociados a la métrica de fondo). Se suele denominar "renormalización de Hadamard" a cualquier sustracción del tipo (2.19). Los valores de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  calculados con (2.18) y (2.19) serán diferentes. Sin embargo puede demostrarse que dos renormalizaciones de Hadamard son físicamente indistinguibles. La demostración de este hecho puede verse en los trabajos de Harari (1984), Castagnino, Harari y Núñez (1987) y Castagnino, Gunzig, Nardone y Paz (1986). Presentamos aquí una versión resumida de la misma.

Si llamamos  $G_1^v(x, x')$  a los primeros dos términos de la expresión (2.12) (que como vimos son los mismos para toda forma de Hadamard) y  $G_1^w(x, x')$  al último término en esa expresión (que como vimos está determinado por el valor de  $w_0(x, x')$ ), el  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  calculado a través de (2.11) se descompone en dos contribuciones:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle T_{\mu\nu} \rangle^v + \langle T_{\mu\nu} \rangle^w \quad (2.20)$$

El primer término es el divergente. Podemos escribir explícitamente el segundo término en función de los límites de  $w_0(x, x')$  y sus

derivadas. Para eso conviene definir las siguientes cantidades:

$$X \equiv [\psi_0] \quad (2.21a)$$

$$Z_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} Y \equiv [\psi_0; \alpha\beta] \quad (2.21b)$$

con  $Z_{\alpha}{}^{\alpha} = 0$

Las condiciones (2.15) que aseguran la conservación de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  se reescriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta};{}^{\beta} &= \frac{1}{4} \square (X_{,\alpha}) + \frac{R_{\alpha\beta}}{12} X^{,\beta} + \frac{1}{4} (\xi - \frac{1}{6}) R_{,\alpha} X - \\ &- \frac{1}{4} (m^2 + (\xi - \frac{1}{6}) R) X_{,\alpha} + \frac{1}{2} [\psi_1]_{,\alpha} \end{aligned} \quad (2.22)$$

El valor de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^w$  resulta ser entonces:

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \langle T_{\mu\nu} \rangle^w &= - Z_{\mu\nu} + \frac{1}{3} (X_{;\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \square X) - \frac{m^2}{4} X g_{\mu\nu} \\ &+ (\xi - \frac{1}{6}) (X_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square X) + (\xi - \frac{1}{6}) m^2 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}) \\ &+ 9 (\xi - \frac{1}{6}) g_{\mu\nu} [\psi_1] \end{aligned} \quad (2.23)$$

De esta expresión puede observarse que la traza de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^w$  solo depende de  $X$  y su divergencia es independiente de todos los parámetros anteriormente definidos:

$$16\pi^2 \langle T_{\mu}{}^{\mu} \rangle^w = - m^2 X - 3 (\xi - \frac{1}{6}) \square X + 36 (\xi - \frac{1}{6}) [\psi_1] \quad (2.24a)$$

$$16\pi^2 \langle T_{\mu\nu} \rangle^w_{;{}^{\nu}} = (-2 + 9\xi) [\psi_1]_{,\mu} \quad (2.24b)$$

El propagador de Hadamard más general que puede construirse utilizando objetos geométricos (de hasta cuarto orden adiabático) asociados a la geometría de fondo, dará lugar a un  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^w$  que está determinado por

los valores de las cantidades  $X$  y  $Z_{\mu\nu}$ . La elección más general de estas cantidades con las dimensiones correctas y el límite minkowskiano adecuado es:

$$X = X^{(n)} + A R + \frac{1}{m^2} (T + (3C_1 - C_2) \square R) \quad (2.25a)$$

$$Z_{\mu\nu} = -m^2 A R_{\mu\nu} + (X^{(n)} + m^2)(\xi - 1/6) R_{\mu\nu} + C_1 R R_{\mu\nu} \quad (2.25b)$$

$$+ \left( \frac{A}{3} + C_2 - C_1 \right) R_{;\mu\nu} - 2C_2 (R_{\mu\sigma\nu\rho} R^{\sigma\rho} + \square \frac{R_{\mu\nu}}{2}) - \\ - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\text{traza})$$

donde  $T = \frac{1}{180} (R_{\sigma\rho\tau\epsilon} R^{\sigma\rho\tau\epsilon} - R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho}) + \frac{1}{2} (\xi - 1/6)^2 R^2 - \frac{1}{6} (\xi - 1/5) \square R$

y  $A, C_1, C_2$  son coeficientes reales arbitrarios y  $X^{(n)} = m^2(2\chi + 1 - \ln 2)$ . Como era obvio  $\chi$  puede ser arbitrario. En particular el propagador de S-D se obtiene con una determinada elección de estos coeficientes que resulta ser:

$$A = (\xi - 1/6) (2\chi - \ln 2)$$

$$C_1 = \frac{2}{3} C_2 = - \frac{(2\chi - \ln 2)}{2}$$

Utilizando (2.25) podemos calcular  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^w$  que resulta ser:

$$16\pi^2 \langle T_{\mu\nu} \rangle^w = -m^2 (\xi - 1/6) (R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}) + 9(\xi - \frac{1}{6}) [v_1] g_{\mu\nu} \quad (2.26) \\ - \frac{T}{4} g_{\mu\nu} + m^2 A G_{\mu\nu} + (C_1 - (\xi - \frac{1}{6}) A) H_{\mu\nu}^{(1)} - \\ - C_2 H_{\mu\nu}^{(2)}$$

Para verificar la equivalencia de dos renormalizaciones de Hadamard podemos calcular la diferencia de dos  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^w$  calculados con propagadores definidos por coeficientes distintos. Usando la expresión (2.26) se obtiene fácilmente:

$$16\pi^2 (\langle T_{\mu\nu} \rangle^w - \langle T_{\mu\nu} \rangle^{\bar{w}}) = m^2 (A - \bar{A}) G_{\mu\nu} + \quad (2.27)$$

$$+ (C_1 - \bar{C}_1 + (3 - 1/6)(\bar{A} - A)) + (C_2 - \bar{C}_2) H_{\mu\nu}^{(2)}$$

De esta expresión vemos que la diferencia entre los dos  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^w$  puede ser absorbida en una renormalización finita de las constantes de la teoría y por lo tanto carece de significado físico. Otra característica que puede diferenciar a dos propagadores de Hadamard es la escala  $\mu$  definida en (2.12), que como dijimos antes resulta arbitraria. Puede verse en forma inmediata que si cambiamos la escala de  $\mu$  a  $\mu'$ , el propagador cambia de la siguiente manera:

$$G_i \rightarrow G_i' = G_i - \frac{\Delta^{1/2}}{4\pi^2} V(x, x') \ln \frac{\mu'}{\mu}$$

y en consecuencia el  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  se transforma en:

$$16\pi^2 \langle T_{\mu\nu} \rangle' = 16\pi^2 \langle T_{\mu\nu} \rangle - 2 \ln \frac{\mu'}{\mu} \left\{ \frac{1}{180} (3 H_{\mu\nu}^{(2)} - H_{\mu\nu}^{(1)}) + \right.$$

$$\left. + (3 - 1/6)^2 H_{\mu\nu}^{(1)} - m^2 (3 - 1/6) G_{\mu\nu} + \frac{m^4}{4} g_{\mu\nu} \right\}$$

De esta última expresión vemos que nuevamente la diferencia puede ser absorbida en una renormalización finita de las constantes de la teoría. En consecuencia hemos demostrado la equivalencia física entre dos renormalizaciones de Hadamard cualesquiera.

Por último, vale la pena comentar algunos aspectos del límite de masa nula. Evidentemente si  $m=0$  no es lícito utilizar las expresiones (2.25). En efecto, este método no nos permite construir soluciones de Hadamard para masa nula (no existen soluciones de Hadamard simétricas construidas solamente a partir de elementos geométricos que tengan

significado en cualquier métrica de fondo y que no presenten comportamientos patológicos en el límite no masivo, ver Harari (1984)). Formalmente lo que podemos hacer es obtener el resultado en este caso como el límite para  $m \rightarrow 0$  del caso masivo. De esta manera podemos reobtener el conocido resultado para la anomalía de traza (a la que nos referimos en el capítulo 1). El cálculo puede hacerse en forma sencilla si tenemos en cuenta que para un campo con acoplamiento conforme ( $\xi = 1/6$ ) en la expresión

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{ren} = \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle - \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle^v - \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle^w \quad (2.28)$$

los dos primeros términos del lado derecho son formalmente nulos mientras que el último (usando la expresión (2.26)) resulta ser

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle^w \Big|_{m=0} &= \lim_{m \rightarrow 0} m^2 \left\{ X^{(n)} + AR + \frac{1}{m^2} (T + (3C_1 - C_2) \square R) \right\} \\ &= T + (3C_1 - C_2) \square R \end{aligned} \quad (2.29)$$

Este resultado es igual al expuesto en (1.41) a menos de una renormalización finita de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , ya que las trazas de  $H_{\mu\nu}^{(1)}$  y  $H_{\mu\nu}^{(2)}$  son proporcionales a  $\square R$ ). La presencia de la anomalía de traza es una consecuencia inevitable de este esquema de renormalización.

Una de las características esenciales de la renormalización de Hadamard es que lo que se sustrae para renormalizar a  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  es algo de carácter puramente geométrico. Es por eso que se la suele llamar "renormalización independiente del estado" ya que para renormalizar  $\langle \Psi | T_{\mu\nu} | \Psi \rangle$  se debe sustraer la misma cantidad, independientemente



del estado cuántico del sistema. Sin embargo, este nombre no es del todo feliz ya que lo cierto es que la renormalización de Hadamard sólo es aplicable a una clase de estados a los que llamamos físicos. Estos estados son aquellos que cumplen que  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  reproduce la estructura singular de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$  (ampliaremos este comentario en el capítulo 3).

## 2.2. Renormalización mínima

Se han desarrollado otras técnicas de renormalización que intentan eliminar la presencia de los términos anómalos en  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ . Sin embargo, no existe hasta el momento ningún método de renormalización covariante, aplicable en cualquier geometría de fondo, que permita librarse de la anomalía de traza.

El método de renormalización mínima ha sido utilizado en numerosos trabajos (ver Brout, Englert y Gunzig, 1978, 1979, Brout et al, 1980 y Albrecht y Brandenberger, 1985). Estos trabajos están formulados exclusivamente en métricas de Robertson-Walker. Hemos realizado una generalización de dicho método aplicable a cualquier métrica conforme al espacio de Minkowski, utilizando el mismo lenguaje que en la renormalización de Hadamard (ver Castagnino, Gunzig, Nardone y Paz, 1986). En este párrafo explicaremos brevemente en qué consiste dicho método.

Consideremos el conjunto de métricas que son conformes al espacio de Minkowski y repitamos la construcción de las cantidades  $\chi$  y

$Z_{\mu\nu}$  pero usando ahora los objetos geométricos de esas métricas donde por ejemplo el tensor de Riemann puede ser escrito en términos del de Ricci y del tensor métrico. Mantendremos el requisito de que el límite Minkowskiano sea el usual pero además impondremos que la masa sólo aparezca en el numerador de las expresiones de forma tal de que el límite de masa nula esté bien definido para esas cantidades (esto es posible en métricas con tensor de Weyl nulo pero, como dijimos antes no puede hacerse en general). La forma más general que pueden tener las cantidades  $X$  y  $Z_{\mu\nu}$  es (ver Harari (1984)):

$$X = X^{(m)} + A R \quad (2.30a)$$

$$Z_{\mu\nu} = m^2 B R_{\mu\nu} + C_1 R R_{\mu\nu} + C_2 R_{;\mu\nu} + C_3 R_{\mu\sigma} R^\sigma_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\text{traza}) \quad (2.30b)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son parámetros reales. En el caso de acoplamiento conforme (al que nos restringiremos en esta sección) si pedimos que se satisfagan las condiciones (2.15) observamos que se deben cumplir las siguientes identidades:

$$\left. \begin{aligned} B &= -A \\ C_1 &= -C_3 = -\frac{1}{180} \\ C_2 &= \frac{A}{3} + \frac{1}{540} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

por lo tanto el único parámetro libre es  $A$ . La ecuación (2.23) nos permite construir  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^w$  que resulta ser:

$$16\pi^2 \langle T_{\mu\nu} \rangle^w_{CP} = A m^2 G_{\mu\nu} + \frac{1}{180} \left\{ R R_{\mu\nu} - \frac{R_{;\mu\nu}}{3} - R_{\mu\sigma} R^\sigma_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho} - R^2 + \frac{\square R}{3}) \right\} \quad (2.32)$$

donde con las letras CP queremos significar "conformemente plano". Si definimos ahora  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{CP}$  según:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{CP} = \langle T_{\mu\nu} \rangle^R + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{CP}^W \quad (2.33)$$

es fácil comprobar que su traza resulta ser:

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{CP} = -m^2 (X^{(n)} + AR) \quad (2.34)$$

y que además su divergencia es nula (lo que es obvio ya que se satisfacen las condiciones (2.15)). La renormalización mínima se define de la siguiente manera:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren min}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle - \langle T_{\mu\nu} \rangle_{CP} \quad (2.35)$$

Una primera observación que podemos hacer es que teniendo en cuenta la ecuación (2.34), es inmediato comprobar que no aparece la anomalía de traza, es decir:

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{ren min}} \Big|_{m=0} = 0 \quad (2.36)$$

Si queremos comparar la renormalización mínima con una renormalización de Hadamard podemos utilizar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}^{\text{Had}} &= \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren min}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{CP} - \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{Had}}^{(4)} \\ &= \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren min}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{CP}^{\text{Had}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Si elegimos en particular comparar con la renormalización de S-D (ya sabemos que todas las renormalizaciones de Hadamard son equivalentes entre sí) se puede verificar la siguiente igualdad (que se obtiene a partir de (2.26) y (2.32)):

$$16\pi^2 \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}^{\text{Had}} = A m^2 G_{\mu\nu} + \frac{1}{180} \left\{ R R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{;\mu\nu} - R_{\mu\sigma} R^\sigma{}_\nu + \frac{g_{\mu\nu}}{4} (2 R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho} - \frac{4}{3} R^2 + 4 \square \frac{R}{3}) \right\} \quad (2.38)$$

De esta expresión se puede verificar que ambas renormalizaciones no son equivalentes ya que el lado derecho de la ecuación (2.38) no puede expresarse como combinación lineal de los tensores que aparecen del lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein semiclásicas. El único coeficiente que había quedado libre era  $A$  y, como podemos ver de (2.38), su papel no es importante ya que su contribución a  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}^{\text{min}}$  puede ser absorbida en una renormalización finita de la constante de Newton. Sin embargo vale la pena mencionar el siguiente hecho: si elegimos el valor de  $A = -1/18$ , podemos observar a partir de (2.30) que en el límite de masa cero se obtiene la siguiente igualdad:

$$[\omega_0] \Big|_{m=0} = X = -\frac{R}{12}$$

Este es el preciso valor de  $[\omega_0]$  que genera el propagador asociado al vacío conforme que es el vacío "natural" en este tipo de métricas (si la teoría es invariante conforme como en nuestro caso). En consecuencia, la renormalización mínima puede entenderse como la renormalización natural en las métricas conformemente planas: los parámetros del propagador que se sustrae para renormalizar son contruidos con objetos geométricos asociados a dichas geometrías (y el único coeficiente que queda indeterminado puede ser fijado, si se

desea, pidiendo que este propagador sea el asociado al vacío conforme en el límite no masivo). El grave defecto de este tipo de renormalización es justamente que sólo puede ser formulada en métricas conformes al plano mientras que la renormalización de Hadamard puede ser puesta en práctica en cualquier métrica de fondo. Este hecho hace a la renormalización de Hadamard mucho más atractiva que a la renormalización mínima. En el capítulo 4 analizaremos cómo incide en el tipo de soluciones de las ecuaciones de Einstein semiclásicas el uso de uno u otro tipo de renormalización.

### 2.3 Regularización adiabática

Uno de los métodos más usados en la literatura para abordar el cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  es el que se denomina "regularización adiabática". Este método fue formulado por Parker y Fulling (1974) para métricas de Robertson-Walker y luego extendido por Parker, Fulling y Hu (1974) para métricas tipo Bianchi I. El nombre "regularización adiabática" puede introducir cierta confusión ya que, como veremos, éste no es un método de regularización (entendiendo por regularización a aquel proceso que vuelve finita una cantidad mal definida) sino una forma de plantear el cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  (sería más adecuado denominarlo sustracción adiabática tal como plantea Birrell (1979 a)). En esta sección describiremos este procedimiento y lo utilizaremos para abordar el cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  en algunos ejemplos concretos. Para fijar ideas nos restringiremos a considerar métricas en las cuales el elemento de arco es:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t) dx^i dx^j \quad (2.39)$$

estos espacio-tiempos tienen secciones espaciales planas y son de bastante interés cosmológico. La ecuación de Klein-Gordon puede resolverse por separación de variables, una base razonable de soluciones es del tipo  $\{\phi_k(\vec{x}_1, t), \phi_k^*(\vec{x}_1, t)\}$  con:

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{x}_1, t) = \frac{e^{i k_j x^j}}{(2\pi a)^3} \mu_{\vec{k}}(t) \quad (2.40)$$

donde  $a = (-g)^{1/2}$  y  $\mu_{\vec{k}}(t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\mu}_{\vec{k}} + \left\{ \omega_{\vec{k}}^2 + \mathcal{E} R - \frac{q}{4} H^2 - \frac{3}{2} \dot{H} \right\} \mu_{\vec{k}} = 0 \quad (2.41)$$

"·"  $\equiv \frac{d}{dt}$

en la que utilizamos la siguiente notación

$$\begin{aligned} \omega_{\vec{k}}^2 &= (g_{ij} k^i k^j + m^2) \\ h_{ij} &= \dot{g}_{ij} \\ H &= \frac{1}{6} h^{ij} g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\dot{g}}{g} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Es útil reescribir a la función  $\mu_{\vec{k}}(t)$  de la siguiente manera:

$$\mu_{\vec{k}}(t) = (2 \Omega_{\vec{k}}(t))^{-1/2} \exp(-i \int^t \Omega_{\vec{k}}(t') dt') \quad (2.43)$$

ya que la ortonormalidad de la base en el producto interno definido en (2.2) está garantizada si la función  $\Omega_{\vec{k}}$  es real. Podemos reescribir la ecuación (2.41) como:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{\vec{k}}^2 &= \omega_{\vec{k}}^2 + \mathcal{E} R - \frac{q}{4} H^2 - \frac{3}{2} \dot{H} + \frac{1}{4} \left( \frac{\dot{\Omega}_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{\Omega}_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}}} \right) \\ &\equiv \omega_{\vec{k}}^2 + \mathcal{F}_{\vec{k}}(\Omega_{\vec{k}}, \dot{\Omega}_{\vec{k}}, \ddot{\Omega}_{\vec{k}}) \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Hasta aquí no hemos hecho más que un cambio de variables que es adecuado para implementar un desarrollo tipo WKB. En efecto, la ecuación (2.44) puede resolverse en forma iterativa: si  $g_{ij}$  no depende del tiempo  $\Omega_{\vec{k}}^{(0)} = \omega_{\vec{k}}$  es solución exacta de (2.44). Si tomamos a esta función como solución de orden cero y comenzamos a iterar la ecuación definiendo sucesivamente las soluciones de orden  $n$  a partir de las de orden  $n-1$  según:

$$\Omega_{\vec{k}}^{(n)2} = \omega_{\vec{k}}^2 + F_{\vec{k}}(\Omega_{\vec{k}}^{n-1}, \dot{\Omega}_{\vec{k}}^{n-1}, \ddot{\Omega}_{\vec{k}}^{n-1}) \quad (2.45)$$

podemos verificar que (repetiendo el proceso infinitas veces) se obtiene una expresión del siguiente tipo:

$$\Omega_{\vec{k}} = \sum_{j \geq 0} \frac{A_j(\vec{k})}{\omega_{\vec{k}}^j} \quad (2.46)$$

donde los coeficientes  $A_j(\vec{k})$  son funciones de los parámetros y de las derivadas de la métrica ( $h_{ij}$ ,  $\dot{h}_{ij}$ , etc.). Podemos obtener una solución aproximada de la ecuación (2.44) a la que llamaremos solución adiabática de orden  $N$  si en los coeficientes  $A_j(\vec{k})$  que aparecen en (2.46) retenemos solamente aquellos términos que contengan a lo sumo  $N$  derivadas de la métrica. Estas soluciones aproximadas serán una buena aproximación a la solución exacta en regiones en las que la métrica no varíe mucho. Si reemplazamos las soluciones aproximadas en la ecuación (2.43), construimos un conjunto de soluciones aproximadas de la ecuación (2.41) al que denotaremos como  $\{\mu_{\vec{k}ap(n)}, \mu_{\vec{k}ap(n)}^*\}$ . Cualquier función  $f_{\vec{k}}(t)$  solución (exacta) de la ecuación (2.41) puede escribirse como combinación lineal de las funciones  $\mu_{\vec{k}ap(n)}$  y  $\mu_{\vec{k}ap(n)}^*$ .

$$f_k(t) = \alpha_k(t) \mu_{k\text{ap}(N)}(t) + \beta_k(t) \mu_{k\text{ap}(N)}^*(t) \quad (2.47)$$

donde, como  $\mu_{k\text{ap}(N)}$  es una solución aproximada de la ecuación, los "coeficientes"  $\alpha_k(t)$  y  $\beta_k(t)$  son funciones del tiempo sólo a través de términos que son de orden adiabático mayor que  $N$ . Si los coeficientes  $\alpha_k(t)$  y  $\beta_k(t)$  son tales que en un instante cualquiera cumplen que  $\alpha_k(t_0) = 1$ ,  $\beta_k(t_0) = 0$  diremos que el conjunto  $\{f_k(t), f_k^*(t)\}$  es una base adiabática de orden  $N$  de la ecuación (2.41). De esta forma podemos definir también una base adiabática de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon compuesta por modos normales a los que se denomina modos adiabáticos de orden  $N$ . Si desarrollamos el campo en esa base podremos definir operadores de creación y aniquilación a partir de los cuales se define el estado de vacío adiabático de orden  $N$  (al que denotaremos mediante  $|0\rangle_{\text{ad}(N)}$ ) y los correspondientes estados de partícula. Como podemos observar la elección de la métrica (2.39) no jugó ningún papel importante. Lo esencial para poder aplicar el método es que la ecuación pueda ser resuelta por separación de variables lo cual ocurre también con otro tipo de métricas (como por ejemplo las de Robertson-Walker con curvatura espacial no nula).

La receta de la regularización adiabática para el cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$  es la siguiente:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle - {}_{\text{ad}(4)}\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_{\text{ad}(4)} \quad (2.48)$$

donde en la expresión  ${}_{\text{ad}(4)}\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_{\text{ad}(4)}$  conservamos solamente las contribuciones de hasta cuarto orden adiabático. Observando esta



expresión se hace evidente el motivo por el cual dijimos que el nombre "regularización adiabática" no es apropiado: ambos términos en (2.48) son divergentes y para efectuar la diferencia es necesario implementar un verdadero método de regularización (cut-off, regularización dimensional, point-splitting, etc).

Una pregunta surge naturalmente: ¿es equivalente calcular  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  utilizando la fórmula (2.48) a hacerlo usando el método expuesto en la sección 2.1? Si notamos que  $\langle \phi_{ad}^0 | T_{\mu\nu} | \phi_{ad}^0 \rangle$  puede calcularse utilizando la fórmula (2.11) aplicada al propagador adiabático definido como

$$G_1^{ad(u)}(x, x') = \langle \phi_{ad}^0 | \{ \phi(x), \phi(x') \} | \phi_{ad}^0 \rangle \quad (2.49)$$

podemos decir que la equivalencia de ambos métodos queda garantizada si se demuestra que este propagador adiabático es una forma de Hadamard. Esta afirmación sólo fue demostrada explícitamente para métricas de Robertson-Walker espacialmente planas (ver Birrell (1979), Harari (1984)) y para métricas tipo Bianchi I (Núñez (1984), Bernard (1986)). Consideraremos válida esta afirmación postergando hasta el próximo capítulo una demostración de la misma para métricas del tipo (2.39) y tipo Robertson-Walker con curvatura espacial no nula.

El método de regularización adiabática resulta bastante natural si recordamos que, como vimos en el capítulo 1, el propagador renormalizado se puede calcular a partir del propagador sin renormalizar sustrayendo los tres primeros términos del desarrollo de DeWitt-Schwinger. Estos términos son todos los que hay con orden

adiabático menor o igual que cuatro. La regularización adiabática nos propone calcular estos términos haciendo un desarrollo adiabático al nivel de los modos normales.

Pese a que el cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  resulta más sencillo con este método que con otros procedimientos, son contados los casos en los que es posible obtener un resultado analítico. Esto es así ya que para poder encarar el cálculo hay que poder resolver en forma exacta la ecuación de campo lo cual es posible sólo en algunas métricas particulares. Uno de los casos más importantes en los que es posible realizar todos los cálculos en forma analítica es el del espacio de DeSitter. El cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  en este espacio fue realizado por distintos autores usando varios métodos: Dowker y Chrichley (1976) y Mamaev y Mostepanenko (1980) lo hicieron para campos escalares utilizando regularización dimensional y el método de regularización de Pauli-Villars respectivamente; estos mismos métodos fueron usados en el caso de campos de espín 1/2 por Candelas y Raine (1975) y por Mamaev y Mostepanenko (1980).

Nosotros hemos aplicado el método de regularización adiabática para calcular la traza de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  en el espacio de DeSitter para campos masivos de espín arbitrario (ver Castagnino, Harari y Paz (1986 a y b)). En lo que resta de este capítulo expondremos esos resultados. El formalismo que utilizamos, que permite trabajar de manera unificada con campos de distinto espín, hace uso de los "campos de Weinberg". Estos campos fueron introducidos por Weinberg (1964 a,b) en el espacio de Minkowski. Varios autores los estudiaron luego en métricas más generales (ver Dowker y Dowker (1966), Greensing

(1977)) y en particular Birrell (1979 b) formuló de manera muy completa la teoría que describe la dinámica de estos campos en el espacio de DeSitter.

Los campos de Weinberg viven en la representación  $(s, 0) \oplus (0, s)$  del grupo de Lorentz y por lo tanto son espinores con  $2(2s+1)$  componentes. En el espacio de Minkowski cada una de las componentes satisface la ecuación de Klein-Gordon y además se cumplen otras ecuaciones que vinculan las componentes de  $(s, 0)$  con las de  $(0, s)$  (ver por ejemplo Weinberg (1964b) o Grensing (1977)). Para tratar con campos de espín arbitrario en el espacio tiempo curvo es conveniente utilizar el formalismo de tétradas (ver el apéndice 1 para la notación). La ecuación de Klein-Gordon generalizada se escribe entonces reemplazando las derivadas ordinarias por derivadas covariantes con la adecuada conexión espinorial. En nuestro caso, la ecuación que satisface la parte  $(s, 0)$  del campo es:

$$V_a^\mu (\delta_b^a \delta_m^n \partial_\mu + (\Gamma_\mu)_{bm}^{an}) V_b^b (\delta_\rho^m \partial^\nu + (\Gamma^\nu)_\rho^m) \Psi^\rho - m^2 \Psi^n = 0 \quad (2.50)$$

donde  $(\Gamma_\mu)_{bm}^{an}$  y  $(\Gamma_\mu)_b^m$  son las conexiones espinoriales correspondientes a la representación  $(1/2, 1/2) \oplus (s, 0)$  y  $(s, 0)$  respectivamente (la ecuación que satisface la parte  $(0, s)$  del campo es exactamente análoga a la anterior y las ecuaciones que vinculan las distintas componentes pueden verse por ejemplo en el trabajo de Grensing, 1977). Si se quiere asegurar la invariancia de las ecuaciones de campo ante transformaciones conformes de la métrica en el límite de masa nula, se debe agregar a la ecuación (2.50) un

término de acoplamiento con la curvatura. De este modo esta ecuación se convierte en:

$$(\nabla^2 + m^2 - \xi R) \Psi_{(s,0)} = 0 \quad (2.51)$$

donde con el símbolo  $\nabla$  denotamos al operador del primer término de (2.50). Estudiando la forma en que el operador  $\nabla$  se transforma ante una transformación conforme de la métrica se puede demostrar que el acoplamiento conforme corresponde al valor  $\xi = (s+1)/6$  (ver Birrell, 1979). En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \begin{pmatrix} \Psi_{(s,0)}(x) \\ \Psi_{(0,s)}(x) \end{pmatrix} \\ \bar{\Psi}(x) &= (\bar{\Psi}_{(s,0)}(x), \bar{\Psi}_{(0,s)}(x)) \end{aligned} \quad (2.52)$$

La ecuación (2.51) puede escribirse explícitamente en el espacio de DeSitter en el cual el elemento de arco es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(\eta) (-d^2\eta + dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ a(\eta) &= (H\eta)^{-1} \quad H = \text{cte} \end{aligned} \quad (2.53)$$

en efecto, la parte  $(s,0)$  del campo satisface la siguiente ecuación

$$\left\{ \eta^2 \partial_\mu \partial^\mu - 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 2\eta \sigma^{\mu\nu} \partial_\mu + 12\xi + \frac{m^2}{H^2} - s(s+1) \right\} \Psi_{(s,0)} = 0 \quad (2.54)$$

donde  $\sigma^{\mu\nu}$  son los generadores del grupo de Lorentz en la representación  $(s,0)$ . Esta ecuación puede ser resuelta explícitamente por separación de variables si se desarrolla al campo en una base de autoestados de la helicidad. Para ver esto proponemos soluciones del

tipo

$$\Psi_{\vec{p}, s_3}(\vec{x}, \eta) = \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{a(\eta)} \varphi_{\vec{p}, s_3}(\eta) \chi(\vec{p}, s_3) \quad (2.55)$$

donde los espinores  $\chi(\vec{p}, s_3)$  son  $(2s+1)$  espinores (etiquetados con el índice  $s_3$  que varía entre  $-s$  y  $s$ ) que forman una base de la representación  $(s, 0)$  siendo cada uno de ellos un autovector del operador de helicidad. La ecuación que satisface la parte temporal de los modos puede resolverse exactamente en términos de las funciones de Whittaker (ver Gradshteyn y Ryzhik, 1965). Teniendo en cuenta que en la representación  $(s, 0)$  se cumple que  $G_{i0} = -J_i$  y que los espinores  $\chi(\vec{p}, s_3)$  verifican (puede verse una construcción explícita de estos espinores en los trabajos de Weinberg, 1964 a y b):

$$\vec{p} \cdot \vec{J} \chi(\vec{p}, s_3) = s_3 p \chi(\vec{p}, s_3)$$

la ecuación (2.54) se reduce a la siguiente:

$$\left\{ \eta^2 \frac{d^2}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d}{d\eta} + (\eta p)^2 - 2i p \eta s_3 + 12\zeta + \frac{m^2}{H^2} - s(s+1) \right\} \varphi_{\vec{p}, s_3}(\eta) = 0 \quad (2.56)$$

Una base de soluciones de esta ecuación es la formada por  $\{ W_{-s_3, \nu}(z; p\eta), W_{s_3, \nu}(z; p\eta) \}$  donde  $\nu^2 = \frac{q}{4} - 12\zeta - \frac{m^2}{H^2} + s(s+1)$  siendo  $W_{s_3, \nu}(z)$  las funciones de Whittaker (ver Gradshteyn y Ryzhik, 1965). La elección de una determinada función de esta base para construir los modos normales (2.55) corresponde como sabemos a la elección de un estado de vacío particular. En el capítulo 3 discutiremos más ampliamente los criterios que pueden usarse para hacer esta elección, para nuestro cálculo utilizaremos las funciones  $\varphi_{\vec{p}, s_3} \sim W_{-s_3, \nu}$  que

tienen la propiedad de que en el límite de masa nula y acoplamiento conforme corresponden a los modos que se obtienen a partir de las ondas planas mediante una transformación conforme ya que:

$$W_{s, s-1/2}(2ip\eta) \sim e^{-ip\eta}$$

Estos modos tienen también el mismo comportamiento (para  $p \rightarrow \infty$ ) que los que obtendremos mediante el desarrollo adiabático (lo que, como se demuestra en el capítulo 3, es imprescindible para asegurar la renormalizabilidad del  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ ). Finalmente el campo de Weinberg puede ser desarrollado en la base que se construye con los modos (2.55) (y con los correspondientes a la parte (0,s) del campo) de la siguiente manera:

$$\Psi(\vec{x}, \eta) = \sum_{s_3=-s}^s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ e^{i\vec{p}\vec{x}} a_{\vec{p}, s_3} \Psi_{\vec{p}, s_3}^{(+)}(\eta) + e^{-i\vec{p}\vec{x}} b_{\vec{p}, s_3}^{\dagger} \Psi_{\vec{p}, s_3}^{(-)}(\eta) \right\} \quad (2.57a)$$

con

$$\Psi_{\vec{p}, s_3}^{(+)}(\eta) = \frac{1}{(4pa)^{1/2}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi s_3}{2}} \left(\frac{m}{H}\right)^{s_3} W_{-s_3, 0}(2ip\eta) \chi(\vec{p}, s_3) \\ e^{-i\frac{\pi s_3}{2}} \left(\frac{m}{H}\right)^{-s_3} W_{s_3, 0}(2ip\eta) \chi(\vec{p}, s_3) \end{pmatrix} \quad (2.57b)$$

$\Psi_{\vec{p}, s_3}^{(-)}(\eta)$  tiene una expresión analoga que puede consultarse en el trabajo de Birrell (1979 b). Los modos normales están ortonormalizados en el producto interno definido de la siguiente forma:

$$(\Psi, \phi) = \int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} (\bar{\Psi} \nabla_{\mu} \phi - (-i)^{\mu} \nabla_{\mu} \bar{\Psi} \phi) \quad (2.58)$$

los operadores  $a_{\vec{p}, s_3}^+$  son operadores de creación de partículas (que tienen momento y helicidad bien definidas) y los operadores  $b_{\vec{p}, s_3}^+$  son operadores de creación de antipartículas del mismo tipo.

Si calculamos el valor de espectación de vacío de la traza del tensor de energía momento obtenemos el siguiente resultado (trabajaremos solamente en el caso de acoplamiento conforme):

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = -m^2 \langle \bar{\Psi}(\vec{x}, \eta) \cdot \Psi(\vec{x}, \eta) \rangle \quad (2.59a)$$

$$= \frac{m^2 R}{96\pi^2} \sum_{s_3 = s_m}^5 R_c \left\{ \frac{(-1)^{s_3}}{1 + \delta_{s_3, 0}} \int_0^{\infty} x dx \cdot \right. \quad (2.59b)$$

$$\left. \cdot W_{-s_3, 0}^{(i)}(x) W_{s_3, 0}^{(i)}(-ix) \right\}$$

donde  $s_m = \begin{cases} 0 & s \in \mathbb{N} \\ 1/2 & s \notin \mathbb{N} \end{cases}$

Esta cantidad, como era de esperar, es divergente ya que cada una de las integrales en la sumatoria es infinita. Para renormalizarla sabemos que lo que debemos sustraer es  $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{0,1}(\eta)$ . Para calcular esta cantidad debemos hacer el desarrollo adiabático de los modos normales tal como vimos anteriormente. Para ello proponemos un cambio de variables análogo al realizado en (2.43) escribiendo los modos normales definidos en (2.57) de la siguiente forma:

$$\Psi_{\vec{p}, s_3}(\eta) = \frac{1}{(2a)^{1/2}} \left( \begin{array}{l} \frac{(2p)^{-s_3} (m/H)^{s_3}}{(2 \Omega_{\vec{p}, s_3}^{(s, 0)}(\eta))^{1/2}} e^{-i \int_0^{\eta} \Omega_{\vec{p}, s_3}^{(s, 0)}(\eta') d\eta'} \chi(\vec{p}, s_3) \\ \frac{(2p)^{s_3} (m/H)^{-s_3}}{(2 \Omega_{\vec{p}, s_3}^{(s, 0)}(\eta))^{1/2}} e^{i \int_0^{\eta} \Omega_{\vec{p}, s_3}^{(s, 0)}(\eta') d\eta'} \chi(\vec{p}, s_3) \end{array} \right) \quad (2.60)$$

donde  $\Omega_{\bar{p},s_3}^{(s,0)}(\eta)$  y  $\Omega_{\bar{p},s_3}^{(0,s)}(\eta)$  son  $2(2s+1)$  funciones independientes que satisfacen las siguientes ecuaciones (que son las análogas a las (2.44)):

$$\Omega_{\bar{p},s_3}^2 = \bar{p}^2 + m^2 a^2 + \left[ 12\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - s(s+1) \right] a^2 H^2 \mp 2ip s_3 a H - \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{\Omega}_{\bar{p},s_3}(\eta)}{\Omega_{\bar{p},s_3}(\eta)} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\Omega}_{\bar{p},s_3}^2}{\Omega_{\bar{p},s_3}^2} \right) \quad (2.61)$$

donde cuando aparece  $\mp$  tomaremos el signo de arriba para  $\Omega_{\bar{p},s_3}^{(s,0)}$  y el de abajo para  $\Omega_{\bar{p},s_3}^{(0,s)}$  mientras que con un punto denotamos la derivada respecto de  $\eta$  (la diferencia entre (2.61) para  $s=0$  y (2.43) proviene de que aquí utilizamos el tiempo conforme). Si ahora resolvemos iterativamente esta ecuación reteniendo los términos de hasta cuarto orden adiabático, después de un cálculo bastante tedioso (que podría tardar unos pocos segundos con un programa de manipulación algebraica) obtenemos:

$$\Omega_{\bar{p},s_3}^{2ad(4)} = \omega_p^2 \left\{ 1 + \frac{(A a^2 H \mp B a H)}{\omega_p^2} + \frac{(-\frac{3}{2} m^2 a^4 H^2 \mp \frac{13}{16} B a^4 H^4)}{\omega_p^4} + \frac{(\pm \frac{B a^3 H^3}{2} - \frac{3A a^4 H^4}{2})}{\omega_p^6} + \frac{(\frac{5m^2 a^6 H^2}{4} \mp \frac{11m^2 a^5 B H^3}{4} + \frac{15m^2 a^4 H^4}{2} + 4m^2 a^6 A H^4 + \frac{13}{16} B a^4 H^4)}{\omega_p^8} + \frac{(\pm \frac{5m^4 B a^7 H^3}{2} - \frac{249}{8} m^4 a^8 H^4 - 4m^2 B^2 a^6 H^4 - \frac{5m^4 A a^8 H^4}{2})}{\omega_p^{10}} + \frac{(\frac{81}{2} m^6 a^{10} H^4 + \frac{15}{4} m^4 B^2 a^8 H^4)}{\omega_p^{12}} - \frac{135}{8} \frac{m^8 a^{12} H^4}{\omega_p^{12}} \right\} \quad (2.62)$$

donde

$$A = 12\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - s(s+1) \quad \text{y} \quad B = 2ip s_3$$

Lo que debemos calcular es el desarrollo a cuarto orden de  $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle$ . Este valor de espectación, escrito en términos de las cantidades definidas en (2.60) resulta ser:



$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = -\frac{m^2}{4\pi^2 a^2} \sum_{s_3=-s}^s (-1)^{2s_3} \int_0^{\infty} p^2 dp \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\Omega_{p, s_3}^{(s, 0)}(\eta)} \right) \quad (2.63).$$

Reemplazando el desarrollo (2.62) en esta última expresión y haciendo algunas cuentas obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{ad4} = & (-1)^{2s} \left\{ \frac{(2s+1)m^2 R}{288\pi^2} - \frac{R(2s+1)}{2880\pi^2} \frac{(1-5s(5s-1))}{12} + \right. \\ & + \frac{m^2 R}{48\pi^2} \left[ (2s+1) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + M^2)^{1/2}} - \frac{(2s+1)A}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + M^2)^{3/2}} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2} \sum_{s_3} s_3^2 \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(x^2 + M^2)^{5/2}} \right] \right\} \\ M^2 = & m^2/H^2 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Como esperábamos esta expresión resulta también divergente pero tiene una contribución finita que, como veremos, es de gran importancia.

La receta de regularización adiabática nos dice que el valor de  $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{ren}$  se calcula sustrayendo (2.64) de (2.59), es decir:

$$\begin{aligned} -\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{ren} = & (-1)^{2s} \frac{(1-5s(5s-1))}{12} \frac{R^2(2s+1)}{2880\pi^2} (-1)^{2s} \frac{m^2 R}{288\pi^2} + \\ & + \frac{m^2 R}{96\pi^2} \sum_{s_3=s_m}^s \operatorname{Re} \left\{ \frac{(-1)^{2s}}{1+\delta_{s_3,0}} \int_0^{\infty} x dx W_{-s_3,0}^{(s)}(ix) W_{s_3,0}^{(s)}(-ix) \right\} - \\ & - (-1)^{2s} \frac{m^2 R}{48\pi^2} \left\{ (2s+1) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + M^2)^{1/2}} - \frac{(2s+1)A}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + M^2)^{3/2}} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \sum_{s_3} s_3^2 \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(x^2 + M^2)^{5/2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Como dijimos antes, para realizar finalmente el cálculo es necesario regularizar las integrales divergentes que aparecen en esta expresión. Antes de hacer eso podemos observar qué es lo que se obtiene si en (2.65) se toma el límite de masa nula. Como se observa,

los únicos términos que sobreviven son los dos primeros y el resultado es:

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{ren} \Big|_{m=0} = - (-1)^{2S} \frac{(2S+1)}{12} (1-5S(5S-1)) \frac{R^2}{2880\pi^2} \quad (2.66)$$

Esta es la famosa contribución anómala que ya ha sido mencionada antes (para campos de distinto espín ya había sido calculada antes por otros autores, por ejemplo Birrell, (1979)).

Para hacer la sustracción necesaria en (2.65) las integrales pueden regularizarse de una manera semejante a la forma en que se trabaja en regularización dimensional: en todas las integrales que aparecen se hace el siguiente cambio

$$\int x^n dx \rightarrow \int x^{n-\epsilon} dx$$

para algún rango de valores de  $\epsilon$  las integrales que aparecen están bien definidas (todas ellas). La sustracción se realiza manteniendo  $\epsilon \neq 0$  y al final del cálculo se toma el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Los detalles de los cálculos pueden encontrarse en el apéndice 2. Este método permite obtener el valor de  $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{ren}$  para campos de cualquier espín. Los resultados para campos de espín 0, 1/2 y 1 son los siguientes:

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{ren} \Big|_{S=0} = -\frac{m^2 R}{96\pi^2} M^2 \left\{ \Psi(3/2+iM) + \Psi(3/2-iM) - 2\gamma_E \right\} - \frac{m^2 R}{288\pi^2} + \frac{R^2}{12 \times 2880\pi^2} \quad (2.67)$$

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{ren} \Big|_{S=1/2} = -\frac{m^2 R}{48\pi^2} (1+M^2) \left\{ \ln M - \text{Re} \Psi(iM) \right\} + \frac{m^2 R}{576\pi^2} + \frac{11 R^2}{24 \times 2880\pi^2} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{ren}}|_{s=1} = & \frac{m^2 R}{16\pi^2} \left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right) \left\{ \psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) - \ln \eta \right\} + \\
 & + \frac{m^2 R}{1152\pi^2} (\eta^2 - 1) - \frac{57}{12 \times 2880} \frac{R^2}{\pi^2}
 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Las fórmulas (2.67) y (2.68) coinciden con los resultados conocidos en la literatura que habían sido calculados con otros métodos.

## CAPITULO 3

### El problema del vacío

#### 3.1. Introducción

Ya hemos hecho mención en esta tesis al problema de la ambigüedad en la definición del estado de vacío. En este capítulo nos ocuparemos del tema con mayor amplitud. Como dijimos antes, el problema está originado en el hecho de que en general no existe ningún criterio a priori que permita seleccionar una base para desarrollar el campo y definir así operadores de creación y destrucción a partir de los cuales construir el espacio de Fock del sistema. Expongamos el problema utilizando otras palabras. Sea un espacio-tiempo (globalmente hiperbólico) en el cual tenemos un observador  $O$ . Como es sabido, en relatividad general un observador puede entenderse simplemente como una foliación de la variedad (con hipersuperficies de Cauchy  $\Sigma$ ) que define una noción natural de tiempo y espacio. Si queremos estudiar un campo cuántico (libre), para definir su espacio de estados necesitamos seleccionar una base de soluciones de la ecuación de campo. Cada base está unívocamente definida por los datos de Cauchy que sus modos normales poseen sobre una hipersuperficie de Cauchy. Por lo tanto debemos dar algún criterio que nos permita seleccionar los datos de Cauchy que definan a la base físicamente admisible. Distintos juegos de datos de Cauchy darán lugar a distintas bases y por lo tanto a distintos "modelos de partícula".

Supongamos que tenemos un criterio para seleccionar ciertos datos de Cauchy (sobre una hipersuperficie  $\Sigma$ ) y definir así una base privilegiada. Hay dos situaciones interesantes que pueden plantearse y que nos enseñan que el concepto de vacío no es un concepto trivial.

La primera situación interesante es la siguiente: en el mismo espacio-tiempo podemos tener otro observador  $O'$  (es decir otra foliación) que define su base privilegiada apelando al mismo tipo de criterio que el observador  $O$  lo que le permite elegir ciertos datos de Cauchy privilegiados sobre una hipersuperficie  $\Sigma'$  (que eventualmente podría coincidir con la hipersuperficie  $\Sigma$  usada por el observador  $O$ ). Puede demostrarse que el estado que el observador  $O$  considera vacío no será en general el mismo estado que aquel que  $O'$  eligió como vacío. Las bases privilegiadas asociadas a los dos observadores podrán relacionarse a través de una transformación de Bogoliubov del tipo de la (2.7) que en general podrá tener coeficientes  $\beta_{jk}$  diferentes de cero. En ese caso, si se calcula el valor de espectación del número de partículas en un dado modo (definido por el observador  $O$ ) en el estado de vacío asociado al observador  $O'$  puede mostrarse fácilmente que:

$$\langle \text{vacío } O' | a_k^\dagger a_k | \text{vacío } O' \rangle = \sum_j |\beta_{jk}|^2 \quad (3.1)$$

donde los coeficientes  $\beta_{jk}$  son los que intervienen en la transformación de Bogoliubov que vincula la base asociada a  $O$  con la asociada a  $O'$  y los operadores  $a_k$  son los asociados a la base elegida por el observador  $O$ . Suele decirse por esto, que el concepto de vacío es dependiente del observador. Un ejemplo célebre en la literatura es

el de los observadores de Rindler y Minkowski. En el espacio-tiempo plano los observadores privilegiados son los inerciales; dos observadores inerciales que utilizan el mismo criterio para seleccionar una base privilegiada (las ondas planas) encontrarán que aunque fijen los datos de Cauchy que definan la base en hipersuperficies distintas (lo natural es que cada uno utilice una hipersuperficie de tiempo constante) el estado de vacío será el mismo para los dos (en otras palabras, la transformación de Bogoliubov que vincula ambas bases tendrá todos los coeficientes  $\beta_{\mu\nu}$  nulos). Sin embargo si utilizamos un sistema de observadores uniformemente acelerados (sistema de Rindler) puede comprobarse que, lo que un observador inercial considera como vacío, el observador acelerado lo ve como un baño térmico (y viceversa). Este hecho fue notado por primera vez por Fulling (1973) (y a la temperatura asociada a este fenómeno se la suele denominar temperatura de Fulling). La teoría cuántica de campos formulada por observadores acelerados en forma arbitraria y el estudio de los efectos térmicos asociados a ella fue analizada con gran generalidad por Sánchez (1979, 1981) usando la técnica de los mappings analíticos. Otro ejemplo de este tipo, célebre en la literatura, es el de la radiación de Hawking en los espacios de Shwarshild y DeSitter. Un aspecto en común entre todos estos ejemplos es que en todos ellos aparecen horizontes de eventos para los observadores acelerados. Resulta muy interesante la vinculación que tiene este hecho con la aparición de los efectos térmicos que mencionamos antes (en realidad se ha demostrado que la radiación de Hawking no es de naturaleza térmica ya que presenta la propiedad de ser coherente, cuando nos hemos referido aquí a que un observador detecta un baño térmico hemos querido decir solamente que

la distribución de partículas es de tipo Planckiano, para clarificar estos aspectos pueden verse los recientes trabajos de Lee (1986) y Friedberg, Lee y Pang (1987)).

La otra situación interesante que puede plantearse es la que da lugar al fenómeno de creación de partículas. Supongamos que el observador  $O$  establece un criterio para elegir datos de Cauchy en una hipersuperficie  $\Sigma$ . Usando el mismo criterio elige otros datos de Cauchy en la hipersuperficie  $\Sigma'$ . Puede ocurrir que las funciones de la base definida por los datos de Cauchy privilegiados en la hipersuperficie  $\Sigma$  cuando se propagan hasta la hipersuperficie  $\Sigma'$  no resulten ser aquellas funciones definidas por los datos de Cauchy privilegiados en la hipersuperficie  $\Sigma'$ . Esto quiere decir que el estado que es un vacío físicamente aceptable en la hipersuperficie  $\Sigma$  puede no serlo en  $\Sigma'$ . En la literatura aparecen numerosos ejemplos de cálculos de creación de partículas por este mecanismo que a veces suele denominarse "creación cosmológica de partículas" (ver Parker (1969), Castagnino, Verbeure y Weder (1975), Castagnino, Chimento y Harari (1982), etc). Recientemente este fenómeno fue usado por Abbott y Harari (1986) para calcular el espectro de gravitones presentes en el universo actual. Las partículas son creadas a expensas del campo gravitatorio que actúa como una fuente externa. Un fenómeno análogo a éste se ha estudiado en el espacio de Minkowski y consiste en la creación de partículas por el movimiento de contornos que limitan el espacio (espejos móviles, ver Ferraro, 1986, Castagnino y Ferraro, 1984, 1985, Castagnino, Mazzitelli y Paz, 1987, etc). Este último efecto se ha denominado efecto antiCasimir ya que la fuerza que las partículas creadas ejercen

sobre los contornos, se opone a la fuerza de Casimir que tiende a unirlos.

En todo el comentario precedente hemos evitado referirnos a un aspecto que resulta fundamental. Hemos dicho que para elegir una base hace falta seleccionar ciertos datos de Cauchy utilizando algún criterio físico, pero en ningún momento explicitamos ese criterio. Lo cierto es que en la literatura existe una gran diversidad de criterios propuestos. La mayoría se aplica solamente a situaciones particulares. Por ejemplo, cuando el espacio tiempo posee un vector de Killing de tipo temporal puede definirse de una manera natural la noción de modos de frecuencia positiva o negativa y con ello privilegiar un cierto tipo de base. Otro caso de este tipo es el denominado modelo conforme (al que hicimos referencia en la sección 2.2): cuando el espacio-tiempo es conforme al de Minkowski y las ecuaciones de campo son invariantes frente a transformaciones conformes, es posible introducir un modelo natural a partir de las ondas planas Minkowskianas.

Recientemente se ha planteado un criterio más general, que abarca a los dos ejemplos antes citados (Killing y conforme) como casos particulares (ver Ferraro, 1986, Castagnino y Ferraro, 1987). Dado un observador  $O$ , puede definirse un operador hamiltoniano (dependiente del observador) de la siguiente manera:

$$H_{\Sigma} = \int d\Sigma^{\mu} v^{\nu} T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

donde el vector  $v$  (que caracteriza al observador) está definido como



$\frac{d}{dT}$  siendo  $T$  el tiempo natural asociado al observador y  $d\Sigma^\mu$  es el elemento de área normal a la hipersuperficie  $\Sigma$ . El criterio establecido por Ferraro y Castagnino al que llamaremos "FC", puede formularse de dos maneras equivalentes: 1) Los datos de Cauchy son tales que el operador  $H_\Sigma$  resulta diagonal sobre el espacio de Fock (en la base de números de ocupación) y 2) Los datos de Cauchy son los que hacen que la cantidad  $\langle 0 | H_\Sigma | 0 \rangle$  sea mínima.

Este criterio (el FC) es de naturaleza global ya que involucra a una cantidad, el  $H_\Sigma$  dado en (3.2), que está definida como una integral sobre toda una hipersuperficie de tipo espacial.

De todos los criterios existentes, el FC parece ser el más general ya que abarca casi todos los ejemplos conocidos en la literatura. Sin embargo hay un aspecto fundamental al que antes hemos hecho mención. Para que la teoría tenga sentido físico, es necesario que sea renormalizable. De acuerdo a lo que discutimos en 2.1, esta condición implica necesariamente una fuerte restricción sobre los posibles estados de vacío. Por cierto, sabemos que una condición suficiente para garantizar la renormalizabilidad de la teoría es que el núcleo  $G_1(x, x')$  tenga estructura de Hadamard. Una condición menos restrictiva consiste en pedir que el núcleo  $G_1(x, x')$  dé lugar a un  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  que tenga las mismas divergencias que las de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^r$  (ver II.1). Esta última condición es necesaria y suficiente para asegurar que la teoría sea renormalizable. Una condición aún más débil, que es necesaria pero no suficiente para garantizar la renormalizabilidad, consiste en pedir que el propagador  $G_1(x, x')$  tenga el mismo tipo de divergencias que uno de Hadamard. En la próxima sección analizaremos

cuáles son las consecuencias que devienen de imponer este tipo de requisitos.

### 3.2. Datos de Cauchy y estructura del propagador.

Resulta muy complicado analizar cuáles son las restricciones que imponen sobre los estados de vacío las condiciones que mencionamos arriba si uno pretende trabajar en una métrica general. Lo haremos en espacios con métricas particulares, éstas serán las siguientes:

$$\text{tipo A} \quad ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t) dx^i dx^j \quad (3.3a)$$

$$\text{tipo B} \quad ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ d\chi^2 + f^2(\chi) (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \right] \quad (3.3b)$$

$$\text{con} \quad r = f(\chi) = \begin{cases} \chi & , \chi \in [0, \infty) & (K=0) \\ \sinh \chi & , \chi \in [0, \infty) & (K=-1) \\ \sin \chi & , \chi \in [0, 2\pi) & (K=+1) \end{cases}$$

las métricas (3.3b) corresponden a los espacios de Robertson Walker espacialmente plano, abierto o cerrado.

Estudiaremos qué restricciones aparecen sobre los datos de Cauchy si se impone la condición más débil de las que enunciáramos antes, esto es: analizaremos qué forma deben tener los datos de Cauchy para que el propagador tenga la misma estructura divergente que uno de Hadamard.

En las métricas que analizamos la ecuación de campo es separable. Usaremos la siguiente notación para las bases de soluciones de la misma:

$$\mu_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = E_{\vec{k}}(\vec{x}) \frac{T_{\vec{k}}(t)}{a^{3/2}(t)} \quad (3.4)$$

( $a = 1-g$ )<sup>1/6</sup> para las métricas (3.3a)).

Expongamos en primer lugar nuestro método de análisis (ver Mazzitelli, Paz y Castagnino, 1987). Dadas dos bases de soluciones de la ecuación de campo  $\{\mu_{\vec{k}}; \mu_{\vec{k}}^*\}$  y  $\{\tilde{\mu}_{\vec{k}} = E_{\vec{k}} \cdot \frac{\tilde{T}_{\vec{k}}}{a^{3/2}}; \tilde{\mu}_{\vec{k}}^*\}$  (consideramos que la parte espacial de los modos es la misma para ambas bases), podemos relacionar los propagadores  $G, (x, x')$  asociados a cada base utilizando la expresión (2.9) que en este caso, debido a que la transformación de Bogoliubov es diagonal (justamente por el hecho de que la parte espacial de las bases es la misma), se reduce a:

$$G_1(x, x') = \tilde{G}_1(x, x') + \frac{4}{(a(t)a(t'))^{3/2}} \text{Re} \left\{ \int d\mu(\nu) \cdot E_{\vec{k}}(\vec{x}) E_{\vec{k}}^*(\vec{x}') \cdot \left\{ |\beta_{\vec{k}}|^2 \tilde{T}_{\vec{k}}(t) \tilde{T}_{\vec{k}}^*(t') + \alpha_{\vec{k}} \tilde{T}_{\vec{k}}(t) T_{\vec{k}}(t') \right\} \right\} \quad (3.5)$$

donde  $G, (x, x')$  es el propagador asociado a la base  $\{\mu_{\vec{k}}, \mu_{\vec{k}}^*\}$  y  $\tilde{G}_1(x, x')$  el asociado a  $\{\tilde{\mu}_{\vec{k}}, \tilde{\mu}_{\vec{k}}^*\}$  mientras que los coeficientes de Bogoliubov son los definidos por la transformación:

$$T_{\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}} \tilde{T}_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}} \tilde{T}_{\vec{k}}^*$$

Es fácil ver que los coeficientes de Bogoliubov que vinculan

ambas bases pueden calcularse conociendo los datos de Cauchy de ambas bases en una dada hipersuperficie (que en nuestro caso consideraremos definida por  $t = t_0$ ). Un cálculo sencillo nos muestra que los coeficientes de Bogoliubov pueden relacionarse de la siguiente forma:

$$\beta_{\bar{k}} = \alpha_{\bar{k}} \frac{\tilde{T}_{\bar{k}}}{\tilde{T}_{\bar{k}}^*} \frac{\left( \frac{\dot{T}_{\bar{k}}}{T_{\bar{k}}} - \frac{\dot{\tilde{T}}_{\bar{k}}}{\tilde{T}_{\bar{k}}} \right)}{\left( \frac{\dot{\tilde{T}}_{\bar{k}}^*}{\tilde{T}_{\bar{k}}^*} - \frac{\dot{T}_{\bar{k}}}{T_{\bar{k}}} \right)} \quad (3.6)$$

Supongamos que sabemos que la base  $\{\tilde{\mu}_{\bar{e}}, \tilde{\mu}_{\bar{e}}^*\}$  es tal que su propagador  $\tilde{G}, (x, x')$  tiene las mismas divergencias que las de un propagador de Hadamard, la condición necesaria y suficiente para que el propagador asociado a la base  $\{\mu_{\bar{e}}, \mu_{\bar{e}}^*\}$  también las tenga, es que los últimos dos términos del lado derecho de la expresión (3.5) sean finitos. Esto impone ciertas restricciones sobre los coeficientes de Bogoliubov que, a través de la ecuación (3.6), pueden traducirse en ciertas relaciones entre los datos de Cauchy.

Para aplicar este método lo primero que necesitamos es encontrar una base que haga el papel de la base  $\{\tilde{\mu}_{\bar{e}}, \tilde{\mu}_{\bar{e}}^*\}$  es decir, que sea tal que su propagador posea las divergencias de un propagador de Hadamard. Esta base será la que se obtiene a través del desarrollo adiabático explicado en la sección 2.3. Demostraremos primero esta afirmación para las métricas antes mencionadas (tipos A y B) (adeudábamos esta demostración desde el capítulo 2). Para ello encontraremos en primer lugar, la expresión que tiene un propagador de Hadamard en las métricas que estamos considerando y luego la

compararemos con la del propagador adiabático. Debemos entonces escribir el propagador de Hadamard  $G(x, x')$  utilizando las coordenadas naturales que aparecen en las ecuaciones (3.3). Esto resulta sencillo si recordamos que el cuadrado de la distancia geodésica y el determinante de Van-Vleck tienen una expresión sencilla en términos de las coordenadas normales que denotamos (ver Schouten, 1954):

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} Y^\alpha Y^\beta + \dots \tag{3.7a}$$

$$\Delta^{1/2}(x, x') = 1 + \frac{R_{\alpha\beta}}{12} Y^\alpha Y^\beta + \dots \tag{3.7b}$$

A su vez las coordenadas normales pueden escribirse en términos de las de una carta cualquiera utilizando la siguiente expresión (ver Weinberg, 1972)

$$Y^\alpha = \Delta x^\alpha + \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \Delta x^\beta \Delta x^\gamma + \frac{1}{3!} (\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma) \Delta x^\beta \Delta x^\gamma \Delta x^\delta + \dots \tag{3.8}$$

donde  $\Delta x^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$

Por otra parte, los límites de coincidencia de las funciones  $\mathcal{V}_\mu(x, x')$  pueden conocerse a partir del uso de las expresiones (2.14) o (2.17). Vamos a concentrarnos solamente en calcular los propagadores a tiempos iguales es decir,  $G(\bar{x}, t, \bar{x}', t)$ . Usando la técnica antes descripta y las identidades del apéndice 1 podemos escribir las expresiones para las partes divergentes de  $G_1^{Had}(x, x')$  en las métricas tipo A y tipo B, éstas resultan ser:

$$G_1^{Had}(\bar{x}, t, \bar{x}', t) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \frac{2}{\bar{\sigma}} + (m^2 + (3 - \frac{1}{6})R) \ln \bar{\sigma} - h_{ij} h_{kl} \frac{\Delta x^i \Delta x^j \Delta x^k \Delta x^l}{48 \bar{\sigma}^2} + (h^{ij} + 3h^i h^j + h^{ij} h_{kl}) \frac{\Delta x^i \Delta x^j}{12 \bar{\sigma}^2} + \mathcal{O}(\bar{\sigma} \ln \bar{\sigma}) \right\} \tag{3.9a}$$

donde  $\bar{\sigma} = g_{ij} \frac{\Delta x^i \Delta x^j}{z}$

$$G_1^{Had}(\chi, \varphi, t; \chi', \varphi, t) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \frac{z}{\bar{\sigma}} + \left( m^2 + \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) t \right) \sqrt{\bar{\sigma} + \sigma \bar{\sigma} - h \sigma \bar{\sigma}} \right\} \quad (3.9b)$$

donde  $\bar{\sigma} = \frac{a^2}{z} (\chi - \chi')^2$

Debemos calcular ahora, la forma del propagador asociado al desarrollo adiabático y comprobar, en ambos tipos de métrica, que el resultado que se obtiene es idéntico al de (3.9). Teniendo en cuenta la forma de la base (3.4) y escribiendo la parte temporal de la misma usando la notación de (2.4) es fácil ver que el propagador puede escribirse como:

$$G_1(\bar{x}, t, \bar{x}', t) = \int d\mu(\bar{z}) \frac{E_{\bar{z}}(\bar{x}) E_{\bar{z}}^*(\bar{x}') \omega \int_t^{t'} \Omega_{\bar{z}}(z) dz}{(\sigma^3(t) \sigma^3(t') \Omega_{\bar{z}}(t) \Omega_{\bar{z}}(t'))^{1/2}} \quad (3.10)$$

El propagador adiabático se calcula a partir de (3.10) reemplazando la función  $\Omega_{\bar{z}}(t)$  por el desarrollo adiabático de (2.46) hasta el orden requerido. Para mostrar que  $G_1(x, x')$  tiene las mismas singularidades que  $G_1^{Had}(x, x')$  demostraremos que  $G_1(\bar{x}, t, \bar{x}', t)$  coincide con las expresiones (3.9) para todo tiempo  $t$  (con lo cual también valdrá la coincidencia de las derivadas y por lo tanto la coincidencia de los propagadores para cualquier tipo de separación entre  $x$  y  $x'$ ; ver Fulling, Sweeny y Wald, (1978)).

En las métricas del tipo A se tiene que:

$$G_1(\bar{x}, t, \bar{x}', t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi a)^3} \frac{e^{i k_j \Delta x^j}}{\Omega_{\bar{k}}(t)} \tag{3.11}$$

siendo el desarrollo de  $\Omega_{\bar{k}}(t)$  hasta segundo orden adiabático (para estudiar las singularidades del propagador no hace falta ir más allá del segundo orden adiabático ya que las contribuciones de orden superior son finitas) el siguiente:

$$\Omega_{\bar{k}}^{ad(2)} = \omega_{\bar{k}} \left\{ 1 + \frac{1}{2\omega_{\bar{k}}^2} \left[ \left(3 - \frac{1}{6}\right) R + \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)' - \frac{9}{4} H^2 - \frac{3}{2} \dot{H} + \frac{1}{6} R \right] \right\} \equiv \omega_{\bar{k}} \left\{ 1 + \frac{A_1}{2\omega_{\bar{k}}^2} \right\} \tag{3.12a}$$

donde  $\omega_{\bar{k}}^2 = (g_{ij} k^i k^j + m^2)$  y  $b = (g_{ij} k^i k^j)^{1/2}$ . Por completitud exponemos también la forma de  $(\dot{\Omega}_{\bar{k}}/\Omega_{\bar{k}})^{ad(2)}$  (que no necesitamos para calcular (3.11)):

$$\frac{\dot{\Omega}_{\bar{k}}}{\Omega_{\bar{k}}}^{ad(2)} = \frac{\dot{b}}{b} \left( 1 - \frac{m^2}{\omega_{\bar{k}}^2} \right) \tag{3.12b}$$

El propagador adiabático es entonces:

$$G_1^{Ad(1)}(\bar{x}, t, \bar{x}', t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi a)^3} \frac{e^{i k_j \Delta x^j}}{\omega_{\bar{k}}} \left\{ 1 - \frac{A_1}{2\omega_{\bar{k}}^2} + \dots \right\} \tag{3.13}$$

El cálculo de las integrales involucradas en (3.13) no es nada trivial (puede encontrarse en el apéndice 3 una versión más detallada del mismo), pero puede realizarse utilizando las siguientes expresiones que son bien conocidas:

$$\omega_k^{-2n-1} = \frac{z^n}{(2n-1)!!} \left(-\frac{\partial}{\partial w^2}\right)^n \omega_k^{-1} \tag{3.14a}$$

$$\Delta_1\left(\frac{r^2}{z}\right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(k^2+w^2)^{1/2}} e^{ik_j r^j} = \frac{w^2}{4\pi^2} J_w \left\{ \frac{H_1^{(2)}((2w^2 r^2)^{1/2})}{(2w^2 r^2)^{1/2}} \right\} \tag{3.14b}$$

y haciendo un cambio de variables del tipo  $\bar{k}' = B \bar{k}$  tal que  $g_{ij} k^i k^j = k^i k^i$  Despues de un cálculo tedioso puede encontrarse que la ecuación (3.13) coincide con (3.9a). Un aspecto interesante a remarcar es el siguiente: el único término del coeficiente  $A_1$  (definido en (3.12a)) que contribuye a la divergencia logarítmica es  $(\sum -1/6)R$  ya que, como puede verse del cálculo explícito, todo lo demás da lugar a una contribución finita pero que no tiene límite bien definido cuando  $x \rightarrow x'$  (esto solo ocurre en métricas anisótropas).

Por su parte en las métricas de tipo B la complicación mayor proviene del hecho de que las secciones espaciales no son planas y por lo tanto la medida resulta ser:

$$\int d\mu(\bar{k}) = \begin{cases} \int d^3k & K=0 \\ \int_0^\infty dk \sum_{J=0}^\infty \sum_{n=-J}^J & K=-1 \\ \sum_{k=0}^\infty \sum_{J=0}^{k-1} \sum_{n=-J}^J & K=+1 \end{cases} \tag{3.15}$$

la parte espacial de los modos de la base (3.4) resulta ser (autofunciones del laplaciano) en cada caso:



$$\left. \begin{aligned} E_{\vec{k}}(\vec{x}) &= \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} & K=0 \\ E_{\vec{k}}(\vec{x}) &= Y_{jn}(\theta, \varphi) \Pi_{k,j}^{(-)}(\chi) & K=-1 \\ E_{\vec{k}}(\vec{x}) &= Y_{jn}(\theta, \varphi) \Pi_{k,j}^{(+)}(\chi) & K=+1 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

donde los  $Y_{jn}(\theta, \varphi)$  son los armónicos esféricos ordinarios y los  $\Pi_{jn}^{(+)}$  son proporcionales a los polinomios de Gegenbauer (ver Bander y Itzykson, 1964) mientras que los  $\Pi_{jn}^{(-)}$  puede obtenerse de  $\Pi_{jn}^{(+)}$  substituyendo  $\chi \rightarrow i\chi$  y  $k \rightarrow ik$  (son proporcionales a las funciones de Gegenbauer). El desarrollo adiabático de la parte temporal de los modos normales es más sencillo que antes resultando:

$$\Omega_{\vec{k}}^{ad(z)} = \omega_{\vec{k}} \left\{ 1 + \frac{(z-1/6)(R-\bar{R})}{\omega_{\vec{k}}^2} \right\} \quad (3.17a)$$

el resultado para  $(\dot{\Omega}_{\vec{k}}/\Omega_{\vec{k}})^{ad(z)}$  es

$$\left( \frac{\dot{\Omega}_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}}} \right)^{ad(z)} = -H + \mathcal{O}(k^{-2}) \quad (3.17b)$$

donde  $\omega_{\vec{k}}^2 = (\frac{k^2}{a^2} + m^2 + (z-\frac{1}{6})\bar{R})$  y  $\bar{R}$  es la curvatura espacial que resulta ser  $\bar{R} = 6K/a^2$ . El propagador adiabático puede calcularse cuando  $t=t'$  como:

$$G_1^{Ad(z)}(\vec{x}; t, \vec{x}'; t) = \int \frac{d\mu(\vec{k})}{a^3(t)} \frac{E_{\vec{k}}(\vec{x}) E_{\vec{k}}^*(\vec{x}')}{\omega_{\vec{k}}} \left\{ 1 - \frac{(z-1/6)(R-\bar{R})}{2\omega_{\vec{k}}^2} + \dots \right\} \quad (3.18)$$

las integrales (y sumas) que aparecen pueden calcularse utilizando las reglas de suma de las funciones de Gegenbauer encontradas por Bander y Itzykson (1964); en primer lugar se puede demostrar que

$$\frac{\int d\mu(\vec{k}) E_{\vec{k}}(\vec{x}) E_{\vec{k}}^*(\vec{x}')}{a^3(t) \omega_{\vec{k}}} = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \frac{2}{\tilde{\sigma}^2} + (m^2 + (z-\frac{1}{6})\bar{R}) \ln \tilde{\sigma} + \right. \quad (3.19) \\ \left. + \mathcal{O}(\tilde{\sigma} \ln \tilde{\sigma}) \right\}$$

usando esta ecuación y la fórmula (3.14) se ve fácilmente que la ecuación (3.18) resulta ser igual a (3.9b). Como vemos en este caso, gracias a la isotropía, no aparecen términos con límite mal definido.

Hemos demostrado entonces que el propagador adiabático (de segundo orden) tiene las mismas divergencias que un propagador de Hadamard en el límite  $x \rightarrow x'$ . Podemos pasar ahora a analizar cuáles son los datos de Cauchy más generales que producen un propagador con las mismas divergencias que uno de Hadamard.

Para ello escribamos a la base más general del tipo (3.4) como combinación de la adiabática:

$$T_E = \alpha_E T_E^{Ad} + \beta_E T_E^{Ad*} \quad (3.20)$$

El propagador  $G_1(x, x')$  asociado a la base en cuestión puede obtenerse a partir del adiabático utilizando la expresión (3.5). Ya mostramos que el primer término de esa expresión tiene las singularidades de un propagador de Hadamard y por lo tanto debemos analizar bajo qué condiciones los términos restantes resultan finitos. Podemos ver fácilmente que si la métrica es de tipo A, como las funciones espaciales son simples exponenciales, la condición  $\beta_E \sim \mathcal{O}(k^{-3})$  es suficiente para asegurar la convergencia de las integrales en (3.5) (recordemos que  $\alpha_E$  es de orden 1 debido a (2.8) y que  $T_E T_E^* d\mu(k) \sim k dk$ ). En el caso de las métricas de tipo B las funciones espaciales son más complicadas y el análisis debe ser más cuidadoso. En ese caso, debido a que los coeficientes de Bogoliubov no dependen de  $\hat{k}$ , sino solo de  $|k|$  (por la isotropía), puede hacerse la integral

sobre las variables angulares obteniéndose:

$$G_1(x, x') = G_1^{\Delta d}(x, x') + \frac{4}{\pi(a(t)a(t'))^{3/2}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen} k(x-x')}{\operatorname{sen}^4(x-x')} \cdot \left\{ |\beta_k|^2 T_k^{\Delta d}(t) T_k^{\Delta d*}(t') + \alpha_k \beta_k^* T_k^{\Delta d}(t) T_k^{\Delta d}(t') \right\} \right\} \quad K=+1 \quad (3.21a)$$

$$G_1(x, x') = G_1^{\Delta d}(x, x') + \frac{4}{\pi(a(t)a(t'))^{3/2}} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} dk \frac{\operatorname{sen} k(x-x')}{\operatorname{sen}^4(x-x')} \cdot \left\{ |\beta_k|^2 T_k^{\Delta d}(t) T_k^{\Delta d*}(t') + \alpha_k \beta_k^* T_k^{\Delta d}(t) T_k^{\Delta d}(t') \right\} \right\} \quad K=-1 \quad (3.21b)$$

De estas ecuaciones es trivial ver que si  $\beta_k \sim \mathcal{O}(k^{-3})$  no aparecen nuevas singularidades.

Ahora bien, la ecuación (3.6) vincula a los coeficientes de Bogoliubov  $\beta_k$  con los datos de Cauchy; si utilizamos para ambas bases la notación definida en (2.43), la ecuación (3.6) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\beta_k = \alpha_k \frac{T_k^{\Delta d}(t_0)}{T_k^{\Delta d}(t_0)} \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\Omega}_k}{\Omega_k} - \frac{\dot{\Omega}_k^{\Delta d}}{\Omega_k^{\Delta d}} \right) + i (\Omega_k - \Omega_k^{\Delta d})}{\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\Omega}_k}{\Omega_k} - \frac{\dot{\Omega}_k^{\Delta d}}{\Omega_k^{\Delta d}} \right) - i (\Omega_k + \Omega_k^{\Delta d})} \Big|_{t=t_0} \quad (3.22)$$

En términos de las funciones  $\Omega_k$  y  $\Omega_k^{\Delta d}$  la condición  $\beta_k \sim \mathcal{O}(k^{-3})$  puede reescribirse como:

$$\Omega_k^2(t_0) = \Omega_k^{\Delta d(2)}(t_0) + \mathcal{O}(k^{-2}) \quad (3.23a)$$

$$\frac{\dot{\Omega}_k}{\Omega_k}(t_0) = \left( \frac{\dot{\Omega}_k^{\Delta d(2)}}{\Omega_k^{\Delta d(2)}} \right)(t_0) + \mathcal{O}(k^{-2}) \quad (3.23b)$$

En consecuencia concluimos que los datos de Cauchy más generales compatibles con la condición de que el propagador tenga las singularidades de uno de Hadamard son aquellos que coinciden con los que se obtienen del desarrollo adiabático hasta el orden  $k^{-2}$ . Un comentario interesante es que las condiciones (3.23) son necesarias y suficientes en métricas de Robertson Walker pero sólo suficientes en el caso anisotrópico. Por ejemplo si los datos de Cauchy son tales que

$$\Omega_E^2(t_0) = \Omega_E^{\Delta d(2)}(t_0) + A(\hat{k}); \quad A(\hat{k}) \sim \mathcal{O}(k^0) \quad (3.24a)$$

$$\frac{\dot{\Omega}_E}{\Omega_E}(t_0) = \left( \frac{\dot{\Omega}_E}{\Omega_E} \right)^{\Delta d(2)}(t_0) + \mathcal{O}(k^{-2}) \quad (3.24b)$$

con  $\int A(\hat{k}) d\Omega = 0$ , entonces  $\beta_k \sim \mathcal{O}(k^{-1})$  y sin embargo puede darse el caso en que las divergencias del propagador en el límite  $x \rightarrow x'$  sean las mismas que las de  $G_1^{\text{Had}}(x, x')$ . De hecho esto es lo que ocurre en las métricas tipo A, si tomamos  $\Omega_E^2 = \omega_E^2 + (\xi - \frac{1}{6})R$  ya que como comentamos antes, la contribución del término  $A_1 - (\xi - \frac{1}{6})R$  a la integral (3.13) es finita (pero con límite mal definido). Sin embargo los datos de Cauchy del tipo (3.24) no resultan apropiados ya que pueden aparecer singularidades no locales en el propagador (o sea singularidades con  $x - x' \neq 0$ ) (ver Najmi y Ottewill, 1985). En la literatura del tema han aparecido recientemente varios resultados compatibles con los nuestros, calculados con otros métodos en métricas que están contenidas en las de tipo A o B (Najmi y Ottewill, 1985, trabajando en métricas de R-W espacialmente planas y Bernard, 1986, en métricas tipo Bianchi I; más recientemente Anderson y Parker, 1987, han demostrado, usando una técnica muy similar a la nuestra, que el propagador adiabático es una forma de Hadamard en métricas de RW con

curvatura espacial positiva).

Como dijimos antes, que el propagador tenga las divergencias de uno de Hadamard es una condición muy débil que no garantiza la renormalizabilidad del tensor de energía momento. Si queremos imponer la condición menos débil, que establece que el propagador sea tal que las divergencias en  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  sean las mismas que aparecen en  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ad}}$  entonces debemos preocuparnos por las contribuciones del término proporcional a  $\ln(\sigma)$  en (2.12). Este término no contribuye a las divergencias de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  sólo si  $\zeta=1/6$ . Si aceptamos que el tensor de energía-momento calculado a partir del propagador adiabático tiene las divergencias de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ad}}$ , entonces resulta sencillo ver que la condición que se debe cumplir para que el tensor de energía-momento calculado a partir de (3.5) también las tenga es que

$$\partial_\mu \partial_\nu \int d\mu(k) \alpha_{\bar{k}} \beta_{\bar{k}}^* T_{\bar{k}}^{\Delta\Delta}(t) T_{\bar{k}}^{\Delta\Delta}(t') E_{\bar{k}}(\bar{x}) E_{\bar{k}}(\bar{x}') < \infty \quad (3.25)$$

de donde se obtiene que  $\beta_{\bar{k}}$  debe ser de orden  $\mathcal{O}(k^{-5})$  y que en consecuencia los datos de Cauchy deben coincidir con los del desarrollo adiabático hasta el orden  $\mathcal{O}(k^{-4})$ . Estos resultados coinciden también con los obtenidos (por otros métodos) por Harari (1984) y Laciana (1986) en métricas de Robertson Walker espacialmente planas.

En lo que queda del capítulo veremos que las condiciones (3.23) sobre los datos de Cauchy, son incompatibles con los criterios "globales" utilizados habitualmente para definir el vacío. Para hacer esto basta con escribir los datos de Cauchy que seleccionan estos

criterios y compararlos con (3.23). El criterio de diagonalización del hamiltoniano dependiente del observador (criterio FC) aplicado en las métricas de tipo A, selecciona los siguientes datos de Cauchy:

$$\Sigma \bar{e}^{(FC)^2} = \omega_{\bar{e}}^2 + 6\bar{e}H(1-6\bar{e}) \quad (3.26a)$$

$$\frac{\dot{\Sigma \bar{e}}^{(FC)}}{\Sigma \bar{e}} = -3H(1-4\bar{e}) \quad (3.26b)$$

Comparándolos con los definidos en (3.23) vemos que son incompatibles salvo en situaciones particulares: regiones asintóticamente estáticas (con  $H=0$ ), métricas isótropas con acoplamiento conforme, etc (estos resultados son análogos a los hallados por Castagnino y Chimento, 1986). Para métricas de tipo B los datos de Cauchy seleccionados por el criterio global resultan ser (Ferraro, 1986):

$$\Sigma \bar{e}^{(FC)^2} = \frac{k^2}{a^2} + \omega^2 + (\bar{e} - \frac{1}{6})\bar{R} + 6\bar{e}(1-6\bar{e})H^2 \quad (3.27a)$$

$$\frac{\dot{\Sigma \bar{e}}^{(FC)}}{\Sigma \bar{e}} = -3H(1-4\bar{e}) \quad (3.27b)$$

La compatibilidad de ambos criterios se da en los mismos casos que en las métricas isótropas de tipo A (la curvatura espacial no influye): son compatibles sólo si  $\bar{e}=1/6$  o  $H=0$ .

Ha habido recientemente algunos intentos de definir el vacío mediante un criterio global distinto (ver Weiss, 1986). El hamiltoniano que minimizamos (o diagonalizamos) para obtener los datos de Cauchy (3.26) y (3.27) es el definido en (3.2) que se obtiene a partir del tensor de energía momento. Este hamiltoniano suele ser llamado hamiltoniano "métrico" y es distinto del hamiltoniano canónico (generador de la evolución), ambos hamiltonianos coinciden solo en el

caso de acoplamiento mínimo ( $\xi = 0$ ). Es bien sabido que es posible definir infinitos hamiltonianos canónicos para una dada teoría con una densidad lagrangiana (una discusión extensa de este punto puede encontrarse en el trabajo de Fulling, 1979). Una forma de seleccionar uno de estos hamiltonianos y a la vez definir el estado de vacío consiste en buscar el hamiltoniano canónico que sea tal que el estado que lo minimice tenga asociado un propagador con estructura de Hadamard. En el trabajo de Weiss (1986) se demostró que esto es posible si la métrica es la de R-W espacialmente plana. Podemos mostrar, utilizando nuestra receta, que el resultado puede generalizarse a métricas de RW con curvatura espacial no nula pero que no puede hacerse si la métrica es anisótropa. El cálculo es el siguiente: propongamos una transformación canónica del siguiente tipo

$$\Psi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) h(t) \quad (3.28)$$

donde  $h(t)$  es una función desconocida que será fijada al final del cálculo. El nuevo hamiltoniano (canónico) asociado a la nueva variable canónica  $\Psi$  es:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \frac{\sqrt{-g}}{h^2(t)} \left\{ (\partial_t \Psi)^2 - g^{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi + \right. \quad (3.29) \\ \left. + (m^2 + \xi R - f(h)) \Psi^2 \right\}$$

donde

$$f(h) = \left( \frac{\dot{h}}{h} \right)^2 + \frac{h^2}{a^2} \left( a^3 \frac{\dot{h}}{h^3} \right)$$

Los datos de Cauchy que diagonalizan este hamiltoniano pueden evaluarse usando las técnicas estándar (ver Ferraro, 1986) siendo los resultados, en los dos tipos de métricas que consideramos, los

siguientes:

$$\text{tipo A} \quad \begin{cases} \Omega_{\vec{e}}^2 = \omega_{\vec{e}}^2 + \vec{e} R - f(h) \\ \frac{\dot{\Omega}_{\vec{e}}}{\Omega_{\vec{e}}} = z \frac{\dot{h}}{h} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \end{cases} \quad (3.30a)$$

$$\text{tipo B} \quad \begin{cases} \Omega_{\vec{e}}^2 = \omega_{\vec{e}}^2 + \vec{e} (R - \bar{R}) - f(h) \\ \frac{\dot{\Omega}_{\vec{e}}}{\Omega_{\vec{e}}} = z \frac{\dot{h}}{h} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \end{cases} \quad (3.30b)$$

Comparando los datos (3.30) con los (3.23), que aseguran que el propagador tiene divergencias de Hadamard, podemos sacar las siguientes conclusiones: (i) en el caso isótropo los datos (3.30) son los correctos si se toma  $h(t) = a(t)$ , con lo cual resulta que  $f(h) = \frac{R - \bar{R}}{6}$  y  $\frac{\dot{\Omega}_{\vec{e}}}{\Omega_{\vec{e}}} = -H$ . Este es el resultado de Weiss (1986) para  $K=0$ , que hemos generalizado para los casos  $K = \pm 1$ . (ii) si la métrica no es isótropa la transformación canónica anterior no puede dar buenos resultados ya que (3.23) depende de  $\hat{k}$  (como se ve fácilmente de (3.12)) mientras que (3.30) no. El uso de una transformación canónica más general que la planteada en (3.29) no es atrayente (por ejemplo una del tipo  $\phi_{\vec{k}}(t) = \Psi_{\vec{k}}(t) \bar{h}_{\vec{k}}^{-1}(t)$  o  $\phi(\vec{x}, t) = \bar{h}(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t)$ ) ya que la nueva densidad hamiltoniana pasaría a ser no local o no uniforme en términos del nuevo campo.

Las condiciones (3.23) son condiciones mínimas que debemos exigir a los datos de Cauchy para conservar alguna esperanza de que la teoría sea renormalizable. Cualquier "modelo global" que se pretenda construir debe tener en cuenta este hecho.



siguientes:

$$\text{tipo A} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\vec{k}}^2 = \omega_{\vec{k}}^2 + \xi R - f(h) \\ \frac{\dot{\Omega}_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}}} = 2\frac{\dot{h}}{h} - 3\frac{\dot{a}}{a} \end{array} \right. \quad (3.30a)$$

$$\text{tipo b} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\vec{k}}^2 = \omega_{\vec{k}}^2 + \xi (R - \bar{R}) - f(h) \\ \frac{\dot{\Omega}_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}}} = 2\frac{\dot{h}}{h} - 3\frac{\dot{a}}{a} \end{array} \right. \quad (3.30b)$$

Comparando los datos (3.30) con los (3.23), que aseguran que el propagador tiene divergencias de Hadamard, podemos sacar las siguientes conclusiones: (i) en el caso isótropo los datos (3.30) son los correctos si se toma  $h(t) = a(t)$ , con lo cual resulta que  $f(h) = \frac{R - \bar{R}}{6}$  y  $\frac{\dot{\Omega}_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}}} = -H$ . Este es el resultado de Weiss (1986) para  $K=0$ , que hemos generalizado para los casos  $K=\pm 1$ . (ii) si la métrica no es isótropa la transformación canónica anterior no puede dar buenos resultados ya que (3.23) depende de  $\hat{k}$  (como se ve fácilmente de (3.12)) mientras que (3.30) no.

Las condiciones (3.23) son las mínimas que les debemos exigir a los datos de Cauchy para conservar alguna esperanza de que la teoría sea renormalizable. Cualquier "criterio global" que se pretenda construir debe tenerlas en cuenta. El hecho de que los criterios globales que parecen físicamente razonables no sean compatibles con estas condiciones mas que en algunas situaciones particulares es, para nosotros, un indicio de que la noción de vacío solo tiene sentido en estas situaciones (regiones IN-OUT en las que el espacio tiempo es asintóticamente estático o posee alguna simetría).

## CAPITULO 4

## El problema del back-reaction

## 4.1 Introducción

Hace ya bastantes años, en el contexto de la teoría de campos en el espacio tiempo curvo, se comenzó a analizar la posibilidad de que los efectos cuánticos permitieran evitar la más inquietante predicción cosmológica de la relatividad general: la existencia de una singularidad inicial. En efecto, siempre se especuló sobre la posibilidad de que al tomar en cuenta efectos cuánticos se puedan violar las hipótesis de los famosos teoremas sobre la inevitabilidad de las singularidades (las de energía dominante o energía fuerte, ver Hawking y Ellis, 1973). Para encontrar respuesta a este tipo de enigmas fue que se comenzó a tratar de resolver el llamado "problema del back-reaction". Este problema podemos formularlo de la siguiente manera: tenemos una teoría de campos en un espacio-tiempo con una métrica  $g_{\mu\nu}$ , usando todas las técnicas habituales podemos calcular  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ , que por supuesto dependerá de  $g_{\mu\nu}$ ; el problema consiste en encontrar aquellas métricas  $g_{\mu\nu}$  que sean solución de las ecuaciones de Einstein semiclásicas que tienen a  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  como fuente. Este problema es sumamente complicado de resolver en general. El principal inconveniente es que  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  es muy difícil de calcular y además es un objeto de naturaleza no local (esto está relacionado con el hecho de que en  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  está contenida la información sobre el estado cuántico del sistema y, como sabemos, el estado cuántico es algo de naturaleza

típicamente global).

Los modelos cosmológicos que se construyen a partir de la soluciones de este problema son los que se suelen denominar "cosmologías (semiclásicas) autoconsistentes". Hasta el presente sólo se han encontrado soluciones del problema del back-reaction para teorías de campo muy sencillas. Sin embargo estos ejemplos bastan para observar que los efectos cuánticos pueden producir modificaciones enormes en el comportamiento de las soluciones cosmológicas. Ya en los trabajos de Ruzmaikina y Ruzmaikin (1969), así como en los de Zeldovich y Starobinsky (1971) y posteriormente en los de Gurovich y Starobinsky (1979) y Frenkel y Brecher (1982) se mostró que considerando solamente campos libres con invariancia conforme, en un universo que además contiene radiación clásica, la singularidad inicial puede ser evitada. También se mostró en los trabajos de Fischetti, Hartle y Hu (1979) que pueden existir soluciones cosmológicas con singularidad inicial pero sin horizonte de eventos. Más recientemente, trabajando siempre con campos libres con invariancia conforme, en los artículos de Anderson (1983, 1984) se realizó un estudio completo de las distintas familias de soluciones de las ecuaciones del back-reaction que tienen la propiedad de no poseer horizontes de eventos y ser asintóticamente "clásicas" (en el sentido de comportarse como un universo dominado por la radiación para tiempos grandes).

Esta línea de trabajos, que más adelante seguiremos comentando, llegó solamente hasta el nivel de resolver en forma completa (mediante métodos numéricos) el problema del back-reaction para campos escalares

libres con masa y con acoplamiento arbitrario con la curvatura (cualquier valor de  $\xi$ ) (Anderson, 1986, Suen 1987, Suen y Anderson, 1987). Otro caso en el que este tipo de análisis puede hacerse con gran generalidad (para campos libres) y en forma analítica es aquél en el que la dimensión del espacio tiempo es  $n=2$  (ver Sanchez (1986)).

En el próximo párrafo presentaremos un método que permite plantear el problema para un campo escalar autointeractuante en términos muy parecidos a los utilizados para campos libres.

#### 4.2 El problema del back-reaction para un campo autointeractuante.

Presentaremos aquí un método que nos permitirá estudiar el problema del back-reaction para el caso de un campo escalar autointeractuante descrito clásicamente por la acción (1.16). Este método nos permitirá encontrar las ecuaciones que rigen la evolución de la métrica y del valor medio del campo en la aproximación de un loop. Remarcamos que obtendremos ecuaciones para la evolución de los valores medios y no para elementos de matriz in-out tales como las que se derivan de la acción efectiva (1.29b).

Como dijimos, nuestro trabajo está enmarcado en la línea de aquéllos que pretenden incorporar efectos cuánticos en modelos cosmológicos resolviendo el problema del back-reaction. Sin embargo toda una importante serie de autores han incorporado estos efectos en cosmología por una vía diferente. Nuestro sencillo campo

autointeractuante ha sido incorporado a una serie de modelos que han tomado gran auge desde la formulación de la teoría del universo inflacionario (para una revisión completa del tema ver por ejemplo los trabajos de Brandenberger, 1985 y Linde, 1984). Sin embargo, las técnicas utilizadas para obtener resultados en estos trabajos han sido sometidas a numerosas críticas algunas de las cuales mencionaremos a continuación. Las ecuaciones relevantes en estos modelos son dos: (a) la ecuación de evolución del valor medio del campo de Higgs ( $\phi_0(\bar{x}, t) = \langle \phi(\bar{x}, t) \rangle$ ) y (b) la ecuación de evolución de la métrica. Las ecuaciones (a) y (b) se escriben habitualmente tomando las ecuaciones de campo clásicas y reemplazando en ellas al potencial de autointeracción  $V(\phi)$  por el potencial efectivo calculado usualmente en la aproximación de 1 loop. Esta es la forma en que se incluyen los efectos cuánticos en la evolución del universo primitivo. La ecuación (a) es la que gobierna la dinámica de la transición de fase mientras que de la (b) se obtiene la inflación.

Las críticas recientes a este tipo de enfoque pueden encontrarse resumidas en el trabajo de Guth y Pi (1985). Según estos autores no es correcto el uso del potencial efectivo, como herramienta para incorporar los efectos cuánticos en el modelo ya que el problema que se está analizando no es estacionario. Otro aspecto poco claro en este enfoque es el relacionado al objeto que se utiliza como fuente de las ecuaciones de Einstein. Usualmente se construye un tensor de energía-momento reemplazando el potencial clásico por el potencial efectivo en la ecuación (4.3) (ver más adelante) y a este tensor se lo evalúa en el campo medio. Parece mucho más razonable utilizar como fuente de las ecuaciones al valor medio del tensor de energía-momento

(ver Albrecht y Brandenberger, 1985 y Marzenko, Unruh y Wald, 1985).

Con nuestro método podemos eludir este tipo de cuestionamientos y podremos analizar bajo qué hipótesis es válido el método habitualmente usado (Paz y Mazzitelli, 1987 a y b).

Como dijimos, estamos interesados en obtener ecuaciones de evolución para valores medios y para ello resulta más conveniente usar el formalismo de cuantificación canónica (descrito ya en el capítulo 2). Las ecuaciones clásicas de movimiento son:

$$-\square\phi + (m^2 + \sum R)\phi + V'(\phi) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{\mu\nu} + \epsilon_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon_2 H_{\mu\nu}^{(2)} + \epsilon_3 H_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\phi) \quad (4.2)$$

donde  $T_{\mu\nu}(\phi)$  está definido en (1.40) y puede ser separado en los siguientes dos términos:

$$T_{\mu\nu}(\phi) = T_{\mu\nu}^{(libre)} - g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (4.3)$$

Supongamos que el estado del sistema es tal que el valor medio del campo es  $\phi_0(\bar{x}, t)$ . En el espíritu del método del campo de fondo descomponemos al campo  $\phi$  de la siguiente manera

$$\phi(\bar{x}, t) = \phi_0(\bar{x}, t) \mathbb{1} + \hat{\phi}(\bar{x}, t) \quad (4.4)$$

donde evidentemente se cumple que  $\langle \hat{\phi} \rangle = 0$ . Si reemplazamos (4.4) en (4.1) y (4.2) y tomamos valor medio obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-\square \phi_0 + (m^2 + \xi R) \phi_0 + V'(\phi_0) + \sum_{n \geq 2} \frac{V^{(n+1)}(\phi_0)}{n!} \langle \hat{\phi}^n \rangle = 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{\mu\nu} + \epsilon_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon_2 H_{\mu\nu}^{(2)} + \epsilon_3 H_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\phi_0) + \\ + \langle \tilde{T}_{\mu\nu}(\hat{\phi}) \rangle - g_{\mu\nu} \sum_{n \geq 3} \frac{V^{(n)}(\phi_0)}{n!} \langle \hat{\phi}^n \rangle \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento de un campo libre con masa variable cuyo valor es  $m^2 + V''(\phi_0)$ . Por otra parte, el campo  $\hat{\phi}$  resulta satisfacer la siguiente ecuación:

$$-\square \hat{\phi} + (m^2 + \xi R + V''(\phi_0)) \hat{\phi} + \sum_{n \geq 2} \frac{V^{(n+1)}(\phi_0)}{n!} (\hat{\phi}^n - \langle \hat{\phi}^n \rangle) = 0 \quad (4.7)$$

El campo  $\hat{\phi}$  es llamado campo de fluctuaciones cuánticas y cumple que  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle \sim \mathcal{O}(\hbar)$ . La aproximación de 1-loop consiste, como sabemos, en despreciar los efectos cuánticos de orden superior a  $\hbar$ . Por lo tanto en esa aproximación las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7) se reducen a las siguientes:

$$-\square \phi_0 + (m^2 + \xi R) \phi_0 + V'(\phi_0) + \frac{V'''(\phi_0)}{2} \langle \hat{\phi}^2 \rangle = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{\mu\nu} + \epsilon_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon_2 H_{\mu\nu}^{(2)} + \epsilon_3 H_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\phi_0) + \\ + \langle \tilde{T}_{\mu\nu}(\hat{\phi}) \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$-\square \hat{\phi} + (m^2 + \xi R + V''(\phi_0)) \hat{\phi} = 0 \quad (4.10)$$

Lo más importante de resaltar es que, en esta aproximación, el campo  $\hat{\phi}$  es un campo libre con una "masa variable" que depende del valor de  $\phi_0$ . Este hecho es el que nos permitirá utilizar las técnicas de cálculo empleadas en los capítulos anteriores. El hecho de que el campo de fluctuaciones, en la aproximación de 1-loop, es un campo libre con masa variable ya había sido resaltado en el capítulo 1 y, como vimos fue de gran utilidad para poder calcular la contribución a la acción efectiva.

Como sabemos, todos los valores medios que aparecen en las ecuaciones (4.8) y (4.9) son divergentes y deben ser renormalizados. Todos ellos pueden ser calculados a partir del propagador  $G(x, x')$  de la ecuación (4.10) utilizando la expresión (2.11). Vamos a calcular todos los valores medios que aparecen en las ecuaciones anteriores utilizando el desarrollo de Schwinger-DeWitt para el propagador. Vamos a trabajar con la teoría  $\lambda \phi^4$ , tal como lo hicimos en el primer capítulo, y usaremos las expresiones (1.19) y (1.22) tomando la siguiente función  $f(x, x')$ :

$$f(x, x') = m^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi_0^2(x) + \phi_0^2(x')) \quad (4.11)$$

Los coeficientes  $\Omega_n(x, x')$  del desarrollo no coinciden con los usados en el cálculo del capítulo 1 ya que allí incluimos el factor  $(\xi - 1/6)R$  en la función  $f(x, x')$  (veremos más adelante que es conveniente proceder de esta manera). Con esta elección para la función  $f(x, x')$  los límites de coincidencia de las primeras funciones  $\Omega_n(x, x')$  y sus



derivadas, calculados a partir de las ecuaciones (1.24), resultan ser los siguientes:

$$\begin{aligned}
 [\Omega_1] &= -(z - 1/6) R \\
 [\Omega_2] &= \frac{1}{180} (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} (z - \frac{1}{6})^2 R^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{6} (\frac{1}{3} - z) \square R - \frac{1}{6} \square V'' \\
 [\Omega_{1,\alpha}] &= \frac{1}{2} (\frac{1}{6} - z) R_{,\alpha} \\
 [\Omega_{1;\alpha\beta}] &= \frac{1}{6} V''_{;\alpha\beta} + \frac{1}{3} (z - \frac{1}{6}) R_{;\alpha\beta} + \frac{1}{60} \square R_{\alpha\beta} - \\
 &\quad - \frac{1}{45} R_{\alpha\gamma} R^{\gamma}_{\beta} + \frac{1}{90} (R_{\alpha\theta\beta\gamma} R^{\theta\gamma} + R_{\alpha\theta\gamma\beta} R^{\theta\gamma}_{\beta})
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Los valores medios que necesitamos calcular se obtienen como límites de coincidencia del propagador y de sus derivadas. El cálculo más sencillo de todos es el de  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$  (que no involucra ninguna derivada). Una vez hecha la integral en el "tiempo propio" se obtiene:

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{f}{\mu^2} \right)^{\frac{n-4}{2}} \sum_{k \geq 0} f^{1-k} [\Omega_k] \Gamma(1+k-\frac{n}{2}) \tag{4.13}$$

donde por  $f$  entendemos  $[f]$ . Expandiendo el resultado alrededor de  $n=4$  podemos observar fácilmente que las divergencias provienen de los primeros dos términos:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\phi}^2 \rangle &= \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{2}{n-4} + \ln \frac{f}{\mu^2} \right) \left( \frac{m^2 + \lambda \phi_0^2/2}{(\frac{n}{2} - 1)} + (z - \frac{1}{6}) R \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{16\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{f^{k+1}} [\Omega_{k+2}]
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde hemos redefinido  $\mu$  para absorber la constante  $\gamma$  (tal como en el primer capítulo).

En primer lugar trabajaremos con la ecuación (4.8) en forma independiente de la ecuación de Einstein semiclásica. Los resultados que obtengamos pueden usarse para analizar la evolución del valor medio de  $\phi(\vec{r}, t)$  en una métrica de fondo dada de antemano. Este tema ha sido estudiado recientemente por Ringwald (1987 a y b) obteniendo resultados que están contenidos en los nuestros (Ringwald trabajó solamente en métricas de R-W espacialmente planas).

Si reemplazamos la ecuación (4.14) en (4.8) observamos que las divergencias pueden ser canceladas con contraterminos adecuados: si escribimos las constantes desnudas (todas las constantes que aparecen en las ecuaciones anteriores son las desnudas) como  $\lambda_D = \lambda_r + \delta\lambda$ , etc, vemos que los contraterminos necesarios para cancelar los infinitos son los mismos que dimos en el capítulo 1 a menos de partes que son finitas cuando  $n=4$  (tal como debía ser). En la prescripción mínima, la ecuación (4.8) se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 -\square\phi_0 + (m_r^2 + \xi_r R)\phi_0 + \frac{\lambda_r}{6}\phi_0^3 + \frac{\lambda_r\phi_0}{32\pi^2} \left( m_r^2 + \left(\xi_r - \frac{1}{6}\right)R + \frac{\lambda\phi_0^2}{2} \right) \cdot \\
 - \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda\phi_0^2/2}{\mu^2} \right) + \frac{\lambda_r\phi_0}{32\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{k! [\mathcal{Z}_{k+2}]}{(m_r^2 + \lambda_r\phi_0^2/2)^{k+1}}
 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Al usar el desarrollo de Schwinger-DeWitt para el propagador  $G_1(x, x')$  estamos eligiendo implícitamente un determinado estado de vacío (el vacío adiabático de orden infinito). Si queremos ser generales y no elegir este vacío podemos hacerlo de la siguiente manera: Como vimos, en (4.13) las divergencias provienen de los primeros dos términos de la serie. Estos términos, a los que denotaremos como  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ad(z)}$  contienen toda la contribución de hasta segundo orden adiabático. Si sumamos y restamos  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ad(z)}$  en (4.8) podemos

reescribir esta ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 -\square \phi_0 + (m^2 + \xi R) \phi_0 + \frac{\lambda \phi_0^3}{6} + \frac{\lambda \phi_0}{2} \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ad(z)} + \\
 + \frac{\lambda \phi_0}{2} \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren} = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

donde hemos definido  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren} = \langle 0 | \hat{\phi}^2 | 0 \rangle - \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ad(z)}$  (donde  $|0\rangle$  es un vacío arbitrario que puede ser elegido de cualquiera de las maneras usuales, mediante algún criterio de invariancia, mediante el criterio FC, etc). Esta última ecuación, teniendo en cuenta lo que hicimos para llegar a (4.15), puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 -\square \phi_0 + (m_r^2 + \Delta m^2) \phi_0 + (\xi_r + \Delta \xi) R \phi_0 + \frac{(\lambda_r + \Delta \lambda) \phi_0^3}{6} + \\
 + \frac{\lambda_r \phi_0}{32\pi^2} (m_r^2 + (\xi_r - \frac{1}{6})R + \frac{\lambda_r \phi_0^2}{2}) \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda_r \phi_0^2/2}{\mu^2} \right) + \\
 + \frac{\lambda_r \phi_0}{2} \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren} = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

donde las cantidades  $\Delta m^2$ ,  $\Delta \xi$  y  $\Delta \lambda$  son las partes finitas de los contratérminos que deben ser fijadas por la prescripción de renormalización (la prescripción mínima consiste en tomar  $\Delta m^2 = \Delta \xi = \Delta \lambda = 0$ ).

La cantidad  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}$  debe ser finita lo que, como sabemos, impone una fuerte restricción sobre los posibles estados de vacío (completamente análoga a la que discutimos para campos libres "con masa constante" en el capítulo 3). Esta cantidad ( $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}$ ) será nula si el espacio-tiempo es el de Minkowski siempre que también se cumpla que  $\phi_0$  sea constante (esto quiere decir que aunque la métrica sea la de Minkowski,  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}$  será no nulo dependiendo de  $\phi_0$  y todas sus derivadas). Para calcular  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}$  podemos utilizar todas las técnicas

conocidas en teoría de campos en el espacio tiempo curvo desarrolladas para campos libres.

El enfoque que habitualmente se sigue en los trabajos que estudian la evolución del valor medio de  $\phi$  se reduce, como dijimos, a reemplazar en la ecuación clásica el potencial clásico por el potencial efectivo. Esto puede entenderse en el marco del presente formalismo de una manera sencilla. Ese enfoque consiste en resolver la ecuación de evolución del campo  $\hat{\phi}$  suponiendo que el valor medio  $\phi$  es constante. Una vez hecho esto se puede pasar a calcular  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}$  que no es otra cosa que el valor de expectación de vacío de  $\hat{\phi}$  para un campo libre con masa constante (la masa es  $m^2 + \frac{\lambda \phi^2}{2} = cte$ ) en una métrica de fondo dada. El paso siguiente es utilizar este objeto, que como dijimos fue calculado suponiendo  $\phi_0$  constante, en la ecuación (4.8), que es la ecuación de evolución para  $\phi_0$ . Como vemos esta aproximación sólo tendrá sentido si la escala en la que varía apreciablemente el valor medio es mucho más grande que la escala en la que varían las fluctuaciones. En cambio con nuestro enfoque esta aproximación no es necesaria.

De acuerdo a lo que dijimos recién, nuestro método nos permite construir una receta sencilla para calcular la derivada del potencial efectivo (en un espacio tiempo arbitrario). Esta cantidad puede leerse de la ecuación (4.16) resultando la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi_0} = & (m_r^2 + \Delta m^2) \phi_0 + (\xi_r + \Delta \xi) R \phi_0 + \frac{(\lambda_r + \Delta \lambda)}{6} \phi_0^3 + \\ & + \frac{\lambda_r \phi_0}{32\pi^2} (m_r^2 + (\xi_r - 1/6) + \frac{\lambda_r \phi_0^2}{2}) \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda \phi_0^2/2}{\mu^2} \right) + \\ & + \frac{\lambda \phi_0}{2} \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren} \Big|_{\phi_0 = cte} \end{aligned} \quad (4.18)$$

En consecuencia podemos afirmar que: siempre que se pueda calcular analíticamente la cantidad  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}$  para un campo libre, con masa y acoplamiento arbitrario con la curvatura, el cómputo del "potencial efectivo" para la teoría  $\lambda \phi^4$  resulta trivial a partir del uso de la ecuación (4.18). Como ejemplos particulares del uso de esta receta podemos citar el del espacio de DeSitter, donde ya vimos cómo se calculaban los valores de espectación renormalizados para campos libres. Usando la formula (4.18) se obtiene la expresión conocida del potencial efectivo en dicho espacio-tiempo. El ejemplo más trivial de aplicación de la receta es el del espacio de Minkowski en donde  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}|_{\phi_0=0}$  es nulo y (4.18) se reduce al conocido potencial efectivo de la teoría  $\lambda \phi^4$  (el potencial efectivo ha sido calculado en el espacio de DeSitter utilizando otros métodos para teorías de campo más complicadas, ver por ejemplo Allen (1983) y Starobinsky (1982)).

Son interesantes de señalar algunos aspectos relacionados con las distintas prescripciones de renormalización que pueden utilizarse. No siempre resulta conveniente el uso de la prescripción mínima ya que la misma no le otorga un sentido físico claro a los parámetros renormalizados  $m_r, \xi_r, \lambda_r$ . Es más intuitivo definir los parámetros renormalizados mediante la siguiente prescripción de renormalización:

$$\left. \begin{aligned} m_r^2 &= \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0; R_{\mu\nu}\sigma=0} \\ \xi_r &= \frac{\partial^3 V_{eff}}{\partial \phi_0^2 \partial R} \Big|_{\phi_0=\phi_1; R_{\mu\nu}\sigma=0} \\ \lambda_r &= \frac{\partial^4 V_{eff}}{\partial \phi_0^4} \Big|_{\phi_0=\phi_2; R_{\mu\nu}\sigma=0} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Esta prescripción fija las partes finitas de los contratérminos, las que resultan ser las siguientes:

$$\delta w^2 = \frac{-\lambda w^2}{16\pi^2(\frac{n}{2}-1)(n-4)} - \frac{\lambda w^2}{32\pi^2} \ln \frac{w^2}{\mu^2} \quad (4.20a)$$

$$\delta \xi = -\frac{\lambda(\xi-1/6)}{16\pi^2(n-4)} - \frac{\lambda(\xi-1/6)}{32\pi^2} \ln \left( \frac{w^2 + \lambda \phi_1^2/2}{\mu^2} \right) - \frac{\lambda^2 \phi_1^2 (\xi-1/6)}{32\pi^2 (w^2 + \lambda \phi_1^2/2)} \quad (4.20b)$$

$$\delta \lambda = \frac{-3\lambda^2}{16\pi^2(\frac{n}{2}-1)(n-4)} - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left( 1 + \ln \left( \frac{w^2 + \lambda \phi_2^2/2}{\mu^2} \right) \right) - \frac{2\lambda^2 \phi_2^2}{32\pi^2} \frac{3w^2 + \lambda \phi_2^2}{(w^2 + \lambda \phi_2^2/2)^2} \quad (4.20c)$$

Si escribimos la derivada del potencial efectivo que se obtiene utilizando la prescripción definida por los contratérminos (4.20) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi_0} = & (w_r^2 + \xi_r R) \phi_0 + \frac{\lambda_r \phi_0^3}{6} + \frac{\lambda_r \phi_0^2}{32\pi^2} \times \left\{ m_r^2 \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda_r \phi_0^2/2}{m_r^2} \right) + \right. \\ & + (\xi_r - 1/6) R \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda_r \phi_0^2/2}{m_r^2 + \lambda_r \phi_1^2/2} \right) + \frac{\lambda_r \phi_0}{2} \left[ \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda_r \phi_0^2/2}{m_r^2 + \lambda_r \phi_2^2/2} \right) - 1 \right] - \\ & - \frac{\lambda_r (\xi_r - 1/6) R \phi_1^2}{m_r^2 + \lambda_r \phi_1^2/2} - \frac{\lambda_r^2 \phi_2^2 \phi_0^2 (3w_r^2 + \lambda_r \phi_2^2)}{3 (m_r^2 + \lambda_r \phi_2^2/2)^2} \left. \right\} + \frac{\lambda_r \phi_0}{2} \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren} \Big|_{\phi_0=cte} \end{aligned} \quad (4.21a)$$

Como ejemplos particulares podemos analizar dos casos: si la masa renormalizada es no nula, podemos elegir las escalas  $\phi_1 = 0 = \phi_2$  obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi_0} = & (m_r^2 + \xi_r R) \phi_0 + \frac{\lambda_r \phi_0^3}{6} + \frac{\lambda_r \phi_0^2}{32\pi^2} \times \left\{ (m_r^2 + (\xi_r - 1/6) R + \lambda_r \phi_0^2/2) \cdot \right. \\ & \cdot \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda_r \phi_0^2/2}{m_r^2} \right) - \lambda_r \frac{\phi_0^2}{2} \left. \right\} + \frac{\lambda_r \phi_0}{2} \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren} \Big|_{\phi_0=cte} \end{aligned} \quad (4.21b)$$

pero si la masa renormalizada es nula debemos elegir  $\phi_1 \neq 0 \neq \phi_2$  y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi_0} = & \xi_r R \phi_0 + \frac{\lambda_r \phi_0^3}{6} + \frac{\lambda_r \phi_0}{32\pi^2} \left\{ 2(\xi_r - \frac{1}{6}) R \left( \ln \frac{\phi_0}{\phi_1} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_r \phi_0^2}{2} \left( \ln \frac{\phi_0}{\phi_2} - \frac{11}{3} \right) \right\} + \frac{\lambda_r \phi_0}{2} \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren} \Big|_{\phi_0 = cte} \end{aligned} \quad (4.21c)$$

Este ultimo resultado es la generalización del potencial de Coleman y Weinberg al espacio-tiempo curvo.

En el caso general, la ecuación de evolución de  $\phi_0$  puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\square \phi_0 + (m_r^2 + \xi_r R) \phi_0 + \frac{\lambda_r \phi_0^3}{6} + \frac{\lambda_r \phi_0}{32\pi^2} \left\{ m_r^2 \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda_r \phi_0^2/2}{m_r^2} \right) + \right. \\ \left. + (\xi_r - 1/6) R \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda_r \phi_0^2/2}{m_r^2 + \lambda_r \phi_1^2/2} \right) + \frac{\lambda_r \phi_0}{2} \left( \ln \left( \frac{m_r^2 + \lambda_r \phi_0^2/2}{m_r^2 + \lambda_r \phi_2^2/2} \right) - 1 \right) \right. \\ \left. - \frac{\lambda_r (\xi_r - 1/6) R \phi_1^2}{(m_r^2 + \lambda_r \phi_1^2/2)} - \frac{\lambda_r^2 \phi_1^2 \phi_0^2 (\xi_r m_r^2 + \lambda_r \phi_1^2)}{3 (m_r^2 + \lambda_r \phi_1^2/2)^2} \right\} + \frac{\lambda_r \phi_0}{2} \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren} = 0 \end{aligned} \quad (4.21d)$$

El enfoque usual consiste en tirar el último término de esta expresión o bien en calcularlo suponiendo que  $\phi_0 = \text{constante}$ . Con nuestro método obtenemos una ecuación general que en el caso en que supongamos que tanto la métrica como  $\phi_0$  varían lentamente (adiabáticamente), admite una forma más o menos cerrada si reemplazamos  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}$  por la serie que aparece en (4.14).

Pasemos a analizar la ecuación de Einstein semiclásica. Para escribir  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  utilizando el desarrollo de Schwinger-DeWitt hace

falta calcular derivadas del propagador y luego tomar el límite de coincidencia. El cálculo resulta ser bastante tedioso (presentamos los detalles del mismo en el apéndice 4) y la expresión a la que puede llegarse es la siguiente:

$$\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle = \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}} + \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{\text{conv}}$$

$\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{\text{conv}}$  puede encontrarse en el apéndice 4 y la parte que es divergente en  $n=4$  dimensiones resulta ser:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}} = & \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{2}{n-4} + \ln \frac{f}{\mu^2} \right) \left\{ -\frac{f R_{\mu\nu} (3-\frac{1}{6})}{n-2} + \right. \\ & + \frac{R_{\mu\nu}}{2} (3-\frac{1}{6}) [\Omega_1] + 3 \frac{f_{;\mu\nu}}{2} - \frac{[\Omega_1]_{;\mu\nu}}{2} + \frac{g_{\mu\nu} f^2}{n(n-2)} - \frac{g_{\mu\nu} f [\Omega_1]}{2(n-2)} \\ & + g_{\mu\nu} \frac{[\Omega_2]}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 3 \right) [\Omega_1]_{;\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{1}{4} \right) g_{\mu\nu} \square [\Omega_1] - \\ & \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (3-\frac{1}{4}) \square f \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde nuevamente, cuando escribimos  $f$  entendemos  $[f]$ . Utilizando los límites de coincidencia dados en (4.12) esta última ecuación (aunque parezca mentira) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}} = & \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{2}{n-4} + \ln \frac{f}{\mu^2} \right) \left\{ -\frac{m^2 (3-\frac{1}{6}) G_{\mu\nu}}{n-2} + \right. \\ & + \frac{m^4}{n(n-2)} g_{\mu\nu} + \frac{(3-\frac{1}{6})^2}{4} H_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{360} H_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{360} H_{\mu\nu} \\ & + \frac{\lambda^2 \phi_0^2 g_{\mu\nu}}{4n(n-2)} + \frac{\lambda m^2 \phi_0^2}{n(n-2)} g_{\mu\nu} - \frac{\lambda (3-\frac{1}{6})}{4} (-\phi_0^2_{;\mu\nu} + \\ & \left. + g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 + \frac{G_{\mu\nu} \phi_0^2}{(\frac{n}{2}-1)} \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$



Como vemos en (4.22), todos los términos de hasta cuarto orden adiabático están contenidos en la parte divergente. También vemos que la misma contiene términos con derivadas del campo medio (que está actuando como otro background). Observando las expresiones (4.22) y (4.23) podemos comprobar que estos términos son todos aquéllos que se pueden formar con derivadas de  $\phi_0^2$  con dimensiones de hasta  $L^{-4}$ . Podemos generalizar la definición de orden adiabático de la siguiente manera: un término es de orden adiabático "modificado" N si contiene derivadas de la métrica y de  $\phi_0^2$  y posee dimensión  $L^{-N}$  (con esta definición, si un término no contiene ninguna derivada de  $\phi_0^2$  el orden adiabático "modificado" coincide con el orden adiabático usual). Teniendo en cuenta esto, la parte divergente de  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle$  será denotada como  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ad(4)}$ .

Podemos trabajar ahora con la ecuación (4.9) de la misma forma en que procedimos con la (4.8). Si sumamos y restamos  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad(4)}$  en (4.9) y definimos  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  como  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle - \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ad(4)}$ , la ecuación (4.9) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{\mu\nu} + \epsilon_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon_2 H_{\mu\nu}^{(2)} + \epsilon_3 H_{\mu\nu} &= \\ &= T_{\mu\nu}(\phi_0) + \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren} + \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ad(4)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Si usamos la expresión de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad(4)}$  dada en (4.23) podemos comprobar que las divergencias pueden ser canceladas con contraterminos (los que naturalmente resultan ser los mismos que los dados en el capítulo 1, a menos de partes finitas).

La prescripción de renormalización que utilizaremos será la definida por los contratérminos (4.20) para las constantes  $m_r^2$ ,  $\Sigma_r$  y  $\lambda_r$ . Debemos definir una prescripción para las constantes gravitatorias de la teoría. Pediremos que éstas sean los coeficientes que aparecen en las ecuaciones de Einstein semiclásicas multiplicando a los correspondientes tensores en el caso  $\phi_0 = \phi_3$  donde  $\phi_3$  es una escala arbitraria. De esta forma  $K_r^{-1}$  será la constante que multiplica a  $G_{\mu\nu}$ ,  $(\frac{\Delta_r}{K_r})$  la que multiplica a  $g_{\mu\nu}$ , etc. Para satisfacer este requisito, los contratérminos que hace falta definir (que difieren de los dados en (1.30) en una parte finita) resultan ser:

$$\left. \begin{aligned} \delta(K^{-1}) &= \frac{m^2}{8\pi^2(n/2-1)} \left( \frac{1}{n-4} + \ln \frac{f_3}{\mu^2} \right) \\ \delta(\Lambda K^{-1}) &= -\frac{m^4}{8\pi^2 n(n/2-1)} \left( \frac{1}{n-4} + \ln \frac{f_3}{\mu^2} \right) \\ \delta(\epsilon_1) &= \frac{(3-1/6)^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{n-4} + \ln \frac{f_3}{\mu^2} \right) \\ \delta(\epsilon_2) &= -\delta(\epsilon_3) = \frac{1}{2880\pi^2} \left( \frac{1}{n-4} + \ln \frac{f_3}{\mu^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

donde  $f_3 \equiv m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_3^2$

Vale la pena aclarar algo que por conocido no deja de ser importante: si bien tanto en  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}$  como en  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  las constantes que aparecen originalmente son las desnudas, éstas pueden reemplazarse directamente por las renormalizadas independientemente de la prescripción que utilicemos ya que estamos trabajando en la aproximación de 1-loop y la diferencia es siempre orden superior ya que los contratérminos son de orden  $\hbar$ .

Con la prescripción definida antes, la ecuación de Einstein semiclásica se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{\kappa_r} - \frac{m_r^2 (\xi_r - 1/6)}{16\pi^2} \ln \frac{f}{f_3} \right) G_{\mu\nu} + \left( \frac{\Lambda_r}{\kappa_r} + \frac{m_r^4}{64\pi^2} \ln \frac{f}{f_3} \right) g_{\mu\nu} + \\
 & + \left( \epsilon_1 - \frac{(\xi_r - 1/6)^2}{32\pi^2} \ln \frac{f}{f_3} \right) H_{\mu\nu}^{(1)} + \left( \epsilon_2 - \frac{1}{2880\pi^2} \ln \frac{f}{f_3} \right) H_{\mu\nu} + \\
 & + \left( \epsilon_3 + \frac{1}{2880\pi^2} \ln \frac{f}{f_3} \right) = \left\{ (\phi_{0,\mu} \phi_{0,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{0,\rho} \phi_{0,\rho}) + \right. \\
 & + (-\phi_0^2{}_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 + G_{\mu\nu} \phi_0^2) \left( \xi_r + \frac{\lambda_r (\xi_r - 1/6)}{32\pi^2} \ln \frac{f}{f_1} - \frac{\lambda^2 \phi_0^2 (\xi_r - 1/6)}{32\pi^2 f_1} \right) - \\
 & - g_{\mu\nu} \frac{\phi_0^2}{2} \left( m_r^2 + \frac{\lambda_r m_r^2}{32\pi^2} \left( \ln \frac{f}{m_r^2} - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{\lambda_r (\xi_r - 1/6)}{64\pi^2} G_{\mu\nu} \phi_0^2 - g_{\mu\nu} \frac{\phi_0^4}{4!} \cdot \\
 & \left. \times \left( \lambda_r + \frac{3\lambda_r}{32\pi^2} \left( \ln \frac{f}{f_3} - \frac{3}{2} \right) - \frac{2\lambda_r^3 \phi_0^2}{32\pi^2} \left( \frac{3m_r^2 + \lambda_r \phi_0^2}{f^2} \right) \right) \right\} + \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

En el caso particular en que la masa renormalizada sea nula ( $m_r=0$ ) y que además  $\xi_r=1/6$ , la ecuación se reduce a la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \frac{G_{\mu\nu}}{\kappa_r} + \frac{\Lambda_r}{\kappa_r} g_{\mu\nu} + \epsilon_{1r} H_{\mu\nu}^{(1)} + \left( \epsilon_{2r} - \frac{1}{2880\pi^2} \ln \frac{\phi_0^2}{\phi_3^2} \right) H_{\mu\nu}^{(2)} + \\
 & + \left( \epsilon_{3r} + \frac{1}{2880\pi^2} \ln \frac{\phi_0^2}{\phi_3^2} \right) H_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{libre}(\phi_0) - \\
 & - g_{\mu\nu} \frac{\phi_0^4}{4!} \left( \lambda_r + \frac{3\lambda_r^2}{16\pi^2} \left( \ln \frac{\phi_0^2}{\phi_3^2} - \frac{7.5}{6} \right) \right) + \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Como vemos, hemos llegado a una expresión relativamente sencilla que nos permite comparar nuestro método con el enfoque usual. Vemos que en la ecuación (4.27) el objeto que actúa como fuente de las ecuaciones de Einstein semiclásicas es el tensor de energía-momento (4.3) con el potencial clásico reemplazado por el potencial de Coleman

y Weinberg pero también vemos que además aparece  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ . Sin embargo debemos recalcar que sólo en este caso particular ésta es la única modificación introducida por nuestro método: de la ecuación (4.26) se ve que aparecen correcciones a las constantes gravitatorias que habitualmente no son tomadas en cuenta. Tampoco son tomadas en cuenta las modificaciones no triviales que aparecen en las constantes  $\xi$  y  $m^2$  (ver (4.26)). Pero aún en el caso  $m=0$  y  $\xi=1/6$  en que muchos de estos efectos desaparecen, la presencia de  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  es la que, en nuestro formalismo, trae la información sobre las inhomogeneidades en  $\phi_0$ , el estado cuántico del sistema y los efectos de polarización del vacío. Todas estas contribuciones no son tenidas en cuenta en el enfoque usual en el que directamente se toma  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren} = 0$  (por cierto, en el enfoque habitual tampoco se incluyen los tensores de cuarto orden adiabático en el lado izquierdo de las ecuaciones).

Como sabemos, al exigir que  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  sea finito estamos estableciendo una fuerte restricción sobre los posibles estados de vacío, que es exactamente la misma que la que discutimos en los capítulos precedentes. Análogamente a lo que ocurre con  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren}$ ,  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  es nulo si la métrica es la de Minkowski y  $\phi_0$  es constante. Para calcularlo pueden usarse las técnicas esbozadas antes.

El sistema de ecuaciones que debe ser atacadas simultáneamente para resolver el problema del back-reaction es el formado por (4.26), (4.21d) y (4.9). Como vemos, tenemos un método para plantear rigurosamente este problema para campos autointeractuantes pero la resolución del sistema no es nada sencilla.

Veremos que estas ecuaciones pueden ser atacadas numéricamente en un caso de gran interés cosmológico. En esta tesis no resolveremos las ecuaciones, sólo nos restringiremos a estudiar los métodos para encarar su solución.

Consideraremos métricas de Robertson-Walker espacialmente planas (esto lo hacemos por simplicidad ya que el planteo en las métricas tratadas en (3.3) es análogo) y estados en los que se satisfaga que  $\phi_0(x,t) = \phi_0(t)$  (homogeneidad espacial). Mostraremos que las dificultades que presenta la resolución numérica del sistema son las mismas que las que aparecen cuando se estudia el problema del back-reaction para campos libres masivos con acoplamiento arbitrario con la curvatura. Para el cálculo numérico resulta particularmente ventajoso el uso del método de regularización adiabática explicado en la sección 2.3. Si escribimos al campo  $\hat{\phi}$  como

$$\hat{\phi}(\bar{x}, \eta) = \int d\mu(\bar{k}) (a_{\bar{k}} e^{i\bar{k}\bar{x}} f_{\bar{k}}(\eta) + h.c.) \quad (4.28a)$$

donde proponemos para  $f_{\bar{k}}$  una expresión del siguiente tipo

$$f_{\bar{k}}(\eta) = \frac{e^{-i \int^\eta W_{\bar{k}}(z) dz}}{a(\eta) (2 W_{\bar{k}}(\eta))^{1/2}}$$

donde  $\eta$  es el "tiempo conforme" ( $d\eta = dt/a$ ); observamos que la ecuación de campo (4.9) da lugar a la siguiente ecuación para las funciones  $W_{\bar{k}}(t)$ :

$$W_{\bar{k}}^2 = \left\{ k^2 + (m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2}) a^2 + (3 - \frac{1}{6}) R a^2 \right\} + \frac{3}{4} \left( \frac{W'_{\bar{k}}}{W_{\bar{k}}} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{W''_{\bar{k}}}{W_{\bar{k}}} \quad (4.28b)$$

Si se calculan  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle$  y  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$  utilizando el desarrollo (4.28a) y reemplazando la forma de la parte temporal de los modos, se obtienen finalmente expresiones que involucran integrales en  $d\mu(k)$  siendo los integrandos funciones más o menos complicadas de  $W_k$  y  $\dot{W}_k/W_k$ . A modo de ilustración, la componente temporal-temporal de  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle$  resulta ser:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_{00} \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi a)^3} W_k^{-1} \left\{ W_k^2 + \dot{W}_k^2 + \left( \frac{q}{4} - 12\tilde{z}_1 \right) \left( \frac{a'}{a} \right)^2 - \left( 6\tilde{z} - \frac{3}{2} \right) \frac{a' W_k'}{a W_k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{W_k'}{W_k} \right)^2 \right\} \\ &= \int d\mu(k) \tilde{T}_{00}(W_k, \dot{W}_k) \end{aligned} \quad (4.29a)$$

mientras que la expresión para  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$  es:

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi a)^3} W_k^{-1} \quad (4.29b)$$

El resultado en (4.29) es dependiente del estado. La elección de un estado determinado, como sabemos, corresponde a la elección de ciertos datos de Cauchy para las funciones  $W_k(\eta)$ . El cálculo de las cantidades renormalizadas debe hacerse sustrayendo de (4.29a y b) las mismas expresiones, pero calculadas con el desarrollo adiabático (en su versión "modificada" que definimos antes). El cómputo de  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ad(\eta)}$  y  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ad(\eta)}$  es sencillo pero tedioso, las expresiones que resultan son también integrales en  $d\mu(k)$  (algunas de estas integrales resultan finitas y otras divergentes). Para lo que nos proponemos hacer aquí, que no es más que mostrar la similitud que tiene este cálculo con el que se realiza para campos libres ordinarios, no vale la pena escribir la forma explícita de estas cantidades. Simplemente, notamos que podemos expresarlas como integrales (algunas divergentes) de funciones

que sólo dependen de la métrica, sus derivadas, el campo medio  $\phi_0$  y sus derivadas:

$$\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ad(a)} = \int d\mu(k) \mathcal{T}_{\mu\nu}(k, a, H, R, \dot{R}, \dots, \phi_0^2, \ddot{\phi}_0^2, \dot{\phi}_0^2 H) \quad (4.30a)$$

El cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  se hace entonces sustrayendo (4.30a) de (4.29), es decir:

$$\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \int d\mu(k) \left\{ \tilde{T}_{\mu\nu}(W_{\vec{k}}, \dot{W}_{\vec{k}}) - \mathcal{T}_{\mu\nu}(k, a, H, \dots, \phi_0^2, \ddot{\phi}_0^2, \dot{\phi}_0^2 H) \right\} \quad (4.30b)$$

¿Qué es lo que está resuelto para campos libres?. En ese caso, el sistema de ecuaciones autoconsistentes a resolver en forma simultánea está formado por:

1. la componente temporal-temporal de la ecuación semiclásica de Einstein (4.27) (elegimos esa componente ya que es la de menor grado y todas las demás pueden derivarse de ella utilizando la conservación de los tensores que intervienen en la ecuación) que, como vemos, si el campo es libre se reduce considerablemente de tamaño. Esta ecuación contiene a  $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  que en este caso también se calcula mediante una sustracción del tipo (4.30).

2. la ecuación del campo  $\hat{\phi}$ , que se reduce a la ecuación (4.28b) para los modos  $f_{\vec{k}}$  (o las funciones  $W_{\vec{k}}$ ).

3. la ecuación para el valor medio que está totalmente desacoplada de la ecuación (2) ya que es simplemente una ecuación para

un campo libre ordinario.

Este sistema fue resuelto en los trabajos de Anderson (1986) y Anderson y Suen (1987) para el caso de masa no nula y acoplamiento no conforme. Estos autores sólo estudiaron el caso  $\phi_0 = 0$ , pero incluyeron radiación clásica adicional. El principal obstáculo en el método utilizado por Anderson y Suen es el que presenta el manejo numérico de la sustracción que hay que hacer en (4.30b). Para ello diseñaron un código especial que ha funcionado adecuadamente (Suen, 1987). De las ecuaciones que mostramos antes para el caso con interacción, se deduce que la nueva complicación que se introduce es que las ecuaciones (2) y (3) estarán acopladas y que en la ecuación (3) habrá que hacer otra sustracción del tipo de las descritas anteriormente. En consecuencia, vemos que el problema numérico es cualitativamente el mismo que en el caso libre. En las próximas secciones analizaremos algunas características de las soluciones para campos libres.

#### 4.3 El problema del back-reaction para campos libres. El caso invariante conforme.

Como dijimos antes, el problema del back-reaction sólo ha sido resuelto con cierta generalidad en el caso de campos libres. Ya dijimos que en ese caso las ecuaciones (4.8) y (4.10) quedan totalmente desacopladas (tanto el valor medio como la fluctuación son campos libres ordinarios). La complicación mayor en este caso continúa siendo el cómputo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ . Sin embargo, si consideramos



que la teoría es invariante conforme (para nosotros, trabajando con un único campo escalar, esto significa masa nula y  $\xi=1/6$ ) el tensor de energía momento renormalizado sólo incluye el efecto de la polarización del vacío y se transforma en un objeto puramente local. Como hemos visto en el capítulo 2, se cumple que:

$$\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \frac{H_{\mu\nu}^{(1)}}{6 \cdot 2880\pi^2} + \frac{1}{2880\pi^2} \left( R_{\mu\rho} R_{\nu}^{\rho} - \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R^2 \right) \quad (4.31)$$

Puede demostrarse (ver Birrell y Davies, 1982) que en el caso en que tengamos presentes  $N_s$  campos de espín  $s$  (con  $s=0, 1/2, 1$ ), si la teoría es invariante conforme, se verifica que

$$\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \frac{b_2}{2880\pi^2} H_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{b_1}{2880\pi^2} \left( R_{\mu\rho} R_{\nu}^{\rho} - \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R^2 \right) \quad (4.32)$$

donde

$$b_2 = \frac{1}{6} (N_0 + \frac{11}{2} N_{1/2} + 62 N_1)$$

$$b_1 = N_0 + 6N_{1/2} - 18N_1$$

Hay numerosos trabajos que estudian el tipo de soluciones que se obtienen de las ecuaciones de Einstein semiclásicas cuando del lado derecho actúa solamente (4.32) (teniendo en cuenta lo que vimos antes, esto equivale a considerar que el estado del sistema es tal que  $\phi_0=0$ ). Si se escriben las ecuaciones de Einstein semiclásicas con (4.32) como fuente, se observa que el primer término en (4.32) puede ser absorbido en una renormalización finita de la constante  $\epsilon$ . Por otra parte, si trabajamos en cuatro dimensiones, tal como venimos haciéndolo, se cumple que el tensor  $H_{\mu\nu}$  puede escribirse como

combinación lineal de los tensores  $H_{\mu\nu}^{(1)}$  y  $H_{\mu\nu}^{(2)}$ . Además si nos restringimos a considerar métricas conformes al plano, se verifica que el tensor  $H_{\mu\nu}^{(2)}$  es un múltiplo de  $H_{\mu\nu}^{(1)}$  (ya que el tensor de Weyl es nulo). Con todas estas hipótesis la ecuación de Einstein semiclásica se escribe como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \beta' H_{\mu\nu}^{(1)} = -\beta \left( R_{\mu\rho} R_{\nu}^{\rho} - \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\theta\rho} R^{\theta\rho} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R^2 \right) \quad (4.33)$$

donde la constante  $\beta'$  es una combinación de  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, b_2$  y  $K$  mientras que  $\beta = \frac{K b_1}{2880\pi^2}$ .

Esta ecuación puede resolverse con toda generalidad en una métrica de Robertson Walker. El estudio de la misma fue iniciado hace mucho tiempo por Ruzmaikin y Ruzmaikina (limitándose solamente al caso  $\Lambda = 0$ , y a algunos valores particulares de las constantes  $\beta$  y  $\beta'$ ) y continuado por varios autores (ver Fischetti, Hartle y Hu, 1979). Ya hemos citado los recientes trabajos de Anderson (1983, 1984) en los que se hace un análisis muy detallado de las familias de soluciones de esta ecuación; pero el método que permite visualizar con facilidad las distintas familias de soluciones del problema fue planteado por Wada y Azuma (1984) utilizando técnicas propias del análisis de sistemas dinámicos en el espacio de fases. Vamos a presentar aquí una revisión de los resultados de estos autores ya que el método propuesto por ellos es interesante y puede ser bastante útil para después estudiar algunas modificaciones que aparecen cuando se pierde la invariancia conforme.

La componente temporal-temporal de esta ecuación resulta ser:

$$H \ddot{H} = \frac{\beta}{2\beta'} H^4 - \frac{1}{2\beta'} H^2 + \frac{1}{2} (\dot{H}^2 - 6\dot{H}H^2) + \frac{\Lambda}{6\beta'} \quad (4.34)$$

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

Para hacer un análisis cualitativo de la forma de las soluciones de esta ecuación conviene señalar algunos rasgos peculiares que se derivan directamente de (4.34):

i-Tomando  $H=0$  y manteniendo  $\dot{H}$  finito, se deduce que  $\dot{H}_{\pm} = \pm \left( -\frac{\Lambda}{3\beta'} \right)^{1/2}$ . De esto se concluye que si el cociente  $\Lambda/\beta'$  es positivo,  $H=0$  no será nunca solución de la ecuación. Por el contrario, si  $\Lambda/\beta'$  es negativo, los únicos valores de  $\dot{H}$  compatibles con  $H=0$  son  $\dot{H}=\dot{H}_{\pm}$ . Si estudiamos las soluciones de (4.34) como trayectorias (parametrizadas por el tiempo  $t$ ) en el espacio de las fases (es decir, graficamos  $H$  vs  $\dot{H}$ ) obtenemos que dichas trayectorias cortarán el eje  $H=0$  solamente en los puntos  $\dot{H}_{\pm}$  (si  $\Lambda/\beta' < 0$ ) o no lo harán nunca si  $\Lambda/\beta' > 0$ . En particular si  $\Lambda = 0$ , las trayectorias cortan el eje  $H=0$  solamente en el punto  $\dot{H}=0$  (el origen). Aclaremos esto ya que de lo dicho anteriormente se ve claro que (aun en el caso  $\Lambda = 0$ ) el espacio de Minkowski no será solución estable de (4.34) en el sentido de que no existirán soluciones del tipo  $H \sim \delta \cos \omega t$  con  $\delta \ll 1$ . Las trayectorias de este tipo, que serían círculos o espirales alrededor del origen, están prohibidas por lo antedicho. Este punto no está lo suficientemente claro en la literatura, en la que se considera al espacio de Minkowski como una solución de (4.34) que puede ser estable para algún rango de parámetros. A esta conclusión se llega si se hace una "linearización" incorrecta de la ecuación (4.34) (esta conclusión errónea puede verse por ejemplo en los trabajos de Starobinsky, 1984 y

Vilenkin, 1986 y ha sido discutida por nosotros en los trabajos de Castagnino, Gunzig, Nardone y Paz, 1986, Castagnino y Paz, 1986 a y b).

ii-Para hacer un estudio sistemático de las soluciones de (4.34) conviene analizar primero la presencia de puntos fijos en el espacio de fases. Estos puntos cumplen con la condición  $\dot{H}=0$ . Los valores de  $H$  que corresponden a los puntos fijos se obtienen por lo tanto como soluciones de la siguiente ecuación:

$$H^4 - \frac{1}{\beta} H^2 + \frac{\Lambda}{3\beta} = 0 \quad (4.35)$$

de donde

$$H^2 = \frac{1}{2\beta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\Lambda\beta}{3}} \right) \quad (4.36)$$

Estos puntos fijos son soluciones tipo DeSitter de la ecuación (4.33) (ya que se cumple que  $H=\text{constante}$ ).

Definiendo  $D=1-\frac{4\Lambda\beta}{3}$ , la existencia de puntos fijos dependerá de los valores que tomen  $D$  y  $\beta$ . Es fácil ver que: si  $D<0$  no existen puntos fijos, si  $D>1$  existen dos puntos fijos y si  $0<D<1$  hay cuatro puntos fijos si además  $\beta > 0$  y no hay ninguno si  $\beta < 0$  (los puntos fijos vienen siempre de a pares simétricos). Las características de las trayectorias en las cercanías de los puntos fijos pueden estudiarse haciendo un análisis lineal de la ecuación, válido en las proximidades de los mismos. Podemos obtener de esta manera ecuaciones lineales para "modos normales" las que tienen soluciones tipo  $\exp(\gamma_{\pm} t)$  donde  $\gamma_{\pm}$  resultan ser los autovalores de un

cierto operador lineal. Haciendo este análisis detalladamente podemos concluir que en las cercanías de un punto fijo caracterizado por un valor  $H_0$  los autovalores  $\gamma_{\pm}$  son los siguientes:

$$\gamma_{\pm} = -\frac{3H_0}{2} \left( 1 \pm \left( 1 + \frac{4A}{9H_0^2} \right)^{1/2} \right) \quad (4.37)$$

donde

$$A = \frac{1}{\beta'} \left( 1 - \frac{2\Lambda}{27H_0^2} \right)$$

Podemos encontrar también las direcciones de los modos normales (los autovectores del operador lineal antes mencionado). Sin entrar en el detalle de los cálculos podemos resumir los resultados en los gráficos 1 a 8 donde se observan todas las familias de trayectorias.

Las trayectorias descritas en estas figuras y los distintos comportamientos que se observan pueden ser interpretados a través de una analogía con un problema mecánico equivalente (ver Wada y Azuma, 1984) si se hace un cambio de variables en la ecuación (4.34) definido por  $r = |H|^{1/2}$ . En la nueva variable  $r$ , la ecuación puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) \right) = -3\epsilon r^2 \dot{r}^2 \quad (4.38)$$

donde  $\epsilon = s_{\text{eff}}^2(H)$  y  $V(r) = \frac{1}{4\beta'} \left( \frac{\Lambda}{6r^2} + \frac{r^2}{2} - \beta \frac{r^6}{6} \right)$

De aquí se ve que las ecuaciones son análogas a las de un sistema disipativo o antidisipativo según el sistema se expanda ( $H > 0$ ) o se contraiga ( $H < 0$ ). Una discusión detallada de este tema (y su aplicación al caso en que como fuente de las ecuaciones de Einstein

En la próxima sección analizaremos cómo se modifican algunas de las soluciones del problema autoconsistente en presencia de campos que rompen la invariancia conforme de la teoría.

#### 4.4 El problema del back-reaction para campos libres. Campos masivos: soluciones tipo DeSitter.

El estudio del problema del back-reaction en presencia de campos escalares masivos o sin acoplamiento conforme con la curvatura ha sido tratado en la literatura desde hace bastante tiempo. Se han utilizado para este propósito distinto tipo de métodos aproximados. Por ejemplo: Parker y Fulling (1974) investigaron los efectos de un campo escalar libre con masa y acoplamiento mínimo en un universo vacío (sin ninguna otra fuente) mientras que Hu y Parker (1978) estudiaron los efectos producidos por los gravitones (a los que se simula con un campo escalar libre no masivo y acoplado mínimamente con la métrica de fondo) en un universo que contiene además un fluido perfecto con ecuación de estado del tipo  $p = \frac{1}{3}\rho$ . Ya mencionamos también, los distintos trabajos en los que este problema es analizado numéricamente.

Otra interesante posibilidad en este tema es el estudio de las soluciones exactas del problema del back-reaction. Como dijimos antes, las ecuaciones autoconsistentes son sumamente complicadas para resolver en general. Sin embargo hay algunas soluciones exactas conocidas. La primera de ellas es, por supuesto, el espacio de Minkowski. La existencia de una solución exacta no trivial de este

problema fue notada por primera vez en el trabajo de Dowker y Critchley (1976), en donde, luego de calcular  $\langle T \rangle$  para un campo escalar libre en el espacio de DeSitter, estos autores notan que dicho espacio puede ser solución de la ecuación de Einstein semiclásica. El análisis de las características de esta solución ha sido objeto de numerosos trabajos recientemente publicados, podemos citar entre ellos a los de Kofman, Sahni y Starobinsky (1983), Sahni y Kofman (1986), Wada y Azuma (1983) y otros. Presentaremos aquí un estudio completo de las características que tiene el espacio de DeSitter como solución de las ecuaciones semiclásicas de Einstein (ver Castagnino, Harari y Paz, 1986 a y b y Castagnino, Paz y Sánchez, 1987).

En primer lugar nos restringiremos a considerar el caso en el que se encuentran presentes sólo campos escalares libres, de masa  $m$  y constante de acoplamiento  $\xi$  arbitraria. Supondremos también que el estado del sistema es un estado de vacío y que por lo tanto  $\phi_0 = 0$  (es fácil ver que si el valor medio del campo no es constante no es posible obtener soluciones tipo DeSitter). Tomaremos como vacío aquel que utilizáramos en el capítulo 3 para el cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ , este estado es denominado vacío de Bunch y Davies (ver Bunch y Davies (1978)).

Vamos a evaluar las ecuaciones de Einstein semiclásicas en la métrica de DeSitter. Para hacer esto conviene tener en cuenta algunos hechos que simplifican notablemente el problema. Debido a la simetría de dicho espacio-tiempo, los tensores  $H_{\mu\nu}^{(1)}$  y  $H_{\mu\nu}^{(2)}$  son nulos (su traza es proporcional a  $\square R$ , que en el espacio de DeSitter se anula). Por otra parte también se cumple que el valor de expectación de vacío de  $T_{\mu\nu}$  es

proporcional a  $g_{\mu\nu}$ . Por lo tanto las ecuaciones semiclásicas de Einstein se reducen a la siguiente:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa g_{\mu\nu} \langle T_f^{\mu\nu} \rangle_{ren} \quad (4.39)$$

Conviene trabajar con la traza de esta ecuación, la que se escribe como:

$$R - 4\Lambda = -\kappa \langle T_f^{\mu}{}_{\mu} \rangle_{ren} \quad (4.40)$$

La expresión de  $\langle T_f^{\mu}{}_{\mu} \rangle_{ren}$  es bien conocida: en el capítulo III la calculamos para campos escalares con acoplamiento conforme, el resultado para campos escalares con cualquier acoplamiento es (puede obtenerse trivialmente a partir del anterior):

$$\langle T_f^{\mu}{}_{\mu} \rangle_{ren} = - \frac{R^2 F(x)}{12 \pi^2 \cdot 2880} \quad (4.41)$$

donde la función  $F(x)$  está definida como:

$$F(x) = 1 - 1080 \left(3 - \frac{1}{6}\right)^2 - 10x - 180x \left(3 - \frac{1}{6}\right) + \quad (4.42) \\ + 15x \left(x + 12 \left(3 - \frac{1}{6}\right)\right) \left[ \psi\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{12}\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{12}\right) - \ln x \right]$$

siendo  $x = 12m^2 / R$ .

La ecuación (4.40) establece entonces una relación entre la curvatura del espacio tiempo y los distintos parámetros que aparecen en la teoría, es decir  $R = R(m, \xi, \Lambda)$ . Clásicamente, tal como puede



verse de la ecuación (4.40) si reemplazamos  $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{ren} = 0$ ,  $R$  será sólo una función de la constante cosmológica:  $R = 4\Lambda$ . Sin embargo los efectos cuánticos harán que las soluciones de la ecuación (4.40) sean otras. Esta ecuación puede reescribirse de la siguiente manera:

$$R - 4\Lambda - R^2 F(x) = 0 \quad (4.43)$$

donde todas las magnitudes en cuestión están medidas en unidades de  $R_0 = 12 \times \frac{2880\pi^2}{K}$  (es decir redefinimos  $R \rightarrow R/R_0$ ,  $\Lambda \rightarrow \Lambda/R_0$  y  $m^2 \rightarrow m^2/R_0$ ).

Analizaremos en primer lugar el caso en que la constante cosmológica es nula (recordamos que clásicamente la única solución posible es  $R=0$ ). El estudio puede hacerse de la siguiente manera: fijado el valor de la constante  $\xi$ , la ecuación (4.43) establece una relación del tipo  $R=R(m)$ . Esta dependencia puede ser analizada conociendo la forma explícita de la función  $F(x)$  (que dependerá de  $\xi$ ): damos un valor de  $x$  y a través de (4.43) obtenemos el correspondiente valor de  $R$ , con  $x$  y  $R$  calculamos la masa  $m$  y de esta forma obtenemos pares  $(R, m)$ . Resulta entonces de gran importancia el conocimiento de la función  $F(x)$ . En las figuras 9 a 12 se encuentra graficada esta función para todo el rango de posibles valores de la constante  $\xi$ . Veamos en los distintos casos cómo se obtienen y cómo se utilizan estos gráficos.

En primer lugar conviene analizar los casos límites  $x \rightarrow 0$  y  $x \rightarrow \infty$ . Observamos que se cumple lo siguiente:

$$F(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{\forall z} \left[ -\frac{8}{21} + 12(z - \frac{1}{6}) - 4320(z - \frac{1}{6})^2 \right] \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (4.44)$$

mientras que

$$F(x=0) = \frac{1 - 1080(z - \frac{1}{6})^2}{370} \quad (4.45a)$$

el límite  $x \rightarrow 0$  en el caso de acoplamiento mínimo debe ser analizado por separado ya que aparecen divergencias en la función  $\Psi(\frac{3}{2}, \eta)$ . El resultado del cálculo en ese caso es:

$$F(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{\forall z} 61 + 30x \ln x + 30x(\eta - 7/3) + O(x^2) \quad (4.45b)$$

Teniendo en cuenta las dos expresiones anteriores podemos dividir los comportamientos de  $F(x)$  para los distintos valores de

- a) si  $z=0$  entonces  $F(x=0) > 0$  y  $F(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 370/21x$
- b) si  $0 < z < z_0$  entonces  $F(x=0) < 0$  y  $F(x) \sim -C/x$  con  $C > 0$
- c) si  $z_0 < z < z_+$  o bien si  $z > z_+$  entonces se cumple que

$$F(x=0) < 0 \text{ y } F(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} C'/x \text{ con } C' < 0$$

- d) si  $z_- < z < z_+$  entonces  $F(x=0) > 0$  y  $F(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} C'/x$  con  $C' < 0$

donde definimos  $z_0 = 0.102$ ,  $z_{\pm} = \frac{1}{6} \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{30}} \right)$

Con el conocimiento adquirido de  $F(x)$  podemos estudiar el comportamiento de las funciones  $R(m)$ . Para esto conviene notar que como  $F(x)$  está en todos los casos acotada superiormente la función  $R(m)$  lo estará inferiormente. En el caso (c) no existirán soluciones

autoconsistentes ya que siempre resulta que  $F(x) < 0$ . En el caso (a)  $R(m)$  será una función monótona creciente que para  $m \rightarrow \infty$  se comportará en forma aproximadamente lineal con  $m$ . Para el caso (b) se observa un comportamiento más curioso: la función  $R(m)$  será bivaluada. Esto se puede demostrar observando que existen rectas que pasan por el origen y que intersectan la curva de la función  $F(x)$  en dos puntos. Esto quiere decir que existen valores de  $x$  (llamémoslos  $x_1$  y  $x_2$ ) tales que  $F(x_1)/x_1 = F(x_2)/x_2$  y por lo tanto para un dado valor de la masa (aquel definido justamente por el cociente  $F(x)/x$ ) existirán dos valores de  $R$  (los definidos por los distintos valores de  $F(x)$ ). En ese caso el comportamiento en el infinito de una de las dos ramas se puede obtener del conocimiento del valor de  $x=x_0$  tal que  $F(x_0)=0$ . En efecto, conociendo ese valor, se obtiene que  $R(m) \rightarrow 12m^2/x_0$ . La otra rama tiene, al igual que en el caso anterior, un comportamiento casi lineal en el infinito. Por último, en el caso (d) la función  $R(m)$  será también una función monótona creciente que en el infinito se comportará como  $R(m) \rightarrow 12m^2/x_0$ . Las curvas  $R$  vs  $m$  están volcadas en las figuras 13, 14 y 15.

Analicemos ahora el caso  $\Lambda \neq 0$ . Fijados los valores de  $\tilde{\epsilon}$  y de la masa, el análisis más interesante resulta ser tal vez el de las curvas  $R$  vs  $\Lambda$ . Nuevamente todo sale a partir del conocimiento de la forma que tiene la función  $F(x)$ : fijado el valor de  $m$ , para cada valor de  $R$  obtenemos el valor de  $F(x)$  y de la ecuación (4.43) calculamos el correspondiente  $\Lambda$ . Como vimos, la función  $F(x)$  tiene comportamientos asintóticos del tipo:

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \alpha + \beta x \quad (4.46a)$$

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x} \quad (4.46b)$$

donde los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $C$  dependen de  $\tilde{z}$ . En consecuencia, el comportamiento de las curvas  $R$  vs  $\Lambda$  en las regiones  $R \rightarrow 0$  y  $R \rightarrow \infty$  será el siguiente:

$$R(1 + 12\omega^2\beta) - \alpha R^2 = 4\Lambda \quad (R \rightarrow \infty) \quad (4.47a)$$

$$R - \frac{C}{12\omega^2} = 4\Lambda \quad (R \rightarrow 0) \quad (4.47b)$$

estas expresiones son válidas para  $m \neq 0$  (si  $m=0$  entonces  $x=0$  y  $F(x)=\alpha$  por lo cual la única ecuación que hay que usar es la (4.47a) que da el comportamiento para todo el rango de  $R$ ). Obviamente para valores grandes de  $R$ , las curvas caen muy lejos de la curva clásica que, como ya dijimos, es  $R=4\Lambda$ . Para  $R \rightarrow 0$ , la curva  $R(\Lambda)$  cae por debajo o por encima de la clásica según sea el signo de la constante  $C$ . Los ceros de la función  $F(x)$  dan información acerca de los puntos en los que la curva  $R(\Lambda)$  intersecta a la curva clásica. El resultado final del análisis está graficado en las figuras 16 a 19.

Con estos elementos podemos analizar cualitativamente las modificaciones que introduce la presencia de la masa en los diagramas de fase de las figuras 1 a 8, al menos en lo que se refiere a sus puntos fijos. Tomando en cuenta las características del caso  $\tilde{z}=1/6$  y  $m \neq 0$  podemos decir que los puntos fijos correspondientes al caso de  $m=0$  se moverán sobre el eje de  $H$  en la dirección de  $|H|$  creciente (hacia  $\pm \infty$ ).

El mismo tipo de análisis de la solución semiclásica de DeSitter puede hacerse para campos de espín arbitrario utilizando para ello el resultado que obtuvimos en el capítulo 2 para  $\langle T \rangle$ . Lo único que cambia en este caso es la forma de la función  $F(x)$ . Este trabajo fue hecho por nosotros para campos de Weimberg espín  $1/2$  y  $1$  para los cuales la nueva función  $F(x)$  puede leerse trivialmente de las expresiones (2.68) y (2.69). No repetiremos nuevamente los cálculos necesarios para el análisis ya que son totalmente análogos a los anteriores. En esos casos las curvas  $R$  vs  $m$  están graficadas en las figuras 20 y 21. El caso de espín  $1/2$  es totalmente análogo al caso (d) del campo escalar, en cambio el caso del campo de espín  $1$  (masivo) es algo diferente ya que su función  $F(x)$  no está acotada superiormente y por lo tanto la curva  $R(m) \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow 0$  (ver Castagnino, Harari y Paz, 1986 a y b).

En el capítulo 2 analizamos las características del método de renormalización mínima y sus diferencias con la renormalización de Hadamard. Podemos estudiar aquí cuáles son las diferencias en las soluciones tipo DeSitter del problema del back-reaction según se use uno u otro método de renormalización. El cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren, min}$  en el espacio de DeSitter puede hacerse sin dificultades para el caso de un campo escalar masivo con acoplamiento conforme, el resultado es el siguiente:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren, min} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \frac{m^4}{8\pi^2} \left[ \Psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \Psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) - \ln \frac{12w^2}{R} \right]$$

Teniendo en cuenta esto, el estudio del tipo de solución autoconsistente se puede hacer con el mismo método que describimos si

reemplazamos la función  $F(x)$  por  $F(x)-1+10x$ . Los resultados se modifican sustancialmente ya que los comportamientos asintóticos de la nueva función  $F(x)$  cambian. Estudiando el límite  $x \rightarrow \infty$  vemos que  $F(x) \rightarrow 10x$ . Por otra parte es fácil ver que siempre se cumple que  $F(x) < 10x$  de donde se obtiene (para  $\Lambda = 0$ ) una masa umbral  $m_U = \frac{288\pi^2}{\kappa}$  por debajo de la cual la solución autoconsistente no existe. Esta solución autoconsistente ha sido utilizada para construir un modelo cosmológico en el que el universo pasa espontáneamente de una etapa en la que la métrica es la de Minkowski a otra en la que la métrica es la de DeSitter. Ambas métricas son soluciones de las ecuaciones del back-reaction y, para el caso en que se utiliza la renormalización mínima, la primera resulta inestable si  $m > m_U$  (ver Gunzig y Nardone, 1982, 1984 a y b, Paz Harari y Castagnino, 1985). La curva  $R$  vs  $m$  (para el caso  $\Lambda = 0$ ) se observa en la figura 22.

#### 4.5 Back-reaction y topología.

Como es sabido, las ecuaciones clásicas de Einstein fijan la geometría local pero no dicen nada acerca de la topología del espacio-tiempo. Sin embargo, como dijimos, el valor de expectación de vacío del tensor de energía momento es un objeto de características globales y que por lo tanto puede llevar información relacionada con la topología. En consecuencia las ecuaciones de Einstein semiclásicas ofrecen la interesante posibilidad de que la topología del espacio-tiempo influya en la geometría local del mismo. Esta posibilidad fue analizada por nosotros (ver Castagnino, Paz y Sanchez,

1987) y por primera vez se ha mostrado explícitamente la existencia de efectos de este tipo. El ejemplo sencillo en el que este fenómeno puede analizarse es nuevamente el del espacio de DeSitter. Es bien sabido que este espacio puede definirse como un hiperboloide embebido en un espacio de cinco dimensiones y métrica lorentziana. Este espacio es invariante frente a una transformación discreta que se denomina "transformación antipodal" y que puede denotarse de la siguiente manera:

$$J: P(x) \longrightarrow \bar{P}(\bar{x}) \quad (4.48)$$

el punto antípoda de  $P(x)$  al que denotamos  $\bar{P}(\bar{x})$  es tal que su cono de luz no se intersecta con el de  $P(x)$ . La transformación  $J$  tiene una expresión simple en el espacio 5-dimensional en donde se puede reducir a una inversión de coordenadas:

$$x^\mu \longrightarrow -x^\mu$$

Usualmente los puntos  $P(x)$  y  $\bar{P}(\bar{x})$  son tratados como puntos distintos de un mismo espacio-tiempo. De esta forma la topología del espacio de DeSitter es  $R^1 \times S^3$ . Sin embargo si los puntos  $P(x)$  y  $\bar{P}(\bar{x})$  se identifican como el mismo punto físico, la topología se vuelve múltiplemente conexa (esta identificación de ambos puntos está en la base de la llamada interpretación elíptica del espacio de DeSitter, ver Schrodinger, 1959, Gibbons, 1986, Sánchez y Folacci, 1986). Ahora bien, en este espacio tiempo con una nueva topología puede construirse una teoría de campos (no sin ciertas sutilezas como puede verse en el trabajo de Sánchez y Folacci, 1986) en la que los campos tengan propiedades de invariancia definidas frente a la transformación  $J$ :

esto quiere decir que los campos deben satisfacer alguna de las siguientes igualdades:

$$\phi(\bar{P}(x)) = \pm \phi(P(x)) \tag{4.49}$$

Con estos campos, que ahora están etiquetados con un índice  $\sigma$  que indica como se comporta el campo frente a la transformación  $J$  (si es par o impar), se pueden construir, entre otras cosas, los propagadores y calcular el valor de expectación de vacío del tensor de energía momento. Estos cálculos que pueden encontrarse en el trabajo de Folacci y Sánchez (1986), dan el siguiente resultado:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}^{\sigma} = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} + \sigma \langle \bar{T}_{\mu\nu} \rangle \tag{4.50}$$

donde  $\langle \bar{T}_{\mu\nu} \rangle = -m^2 g_{\mu\nu} \frac{(m^2 + (\frac{3}{2} - \frac{1}{6})R)}{6\pi \cos \pi \nu}$  y  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  está dado por la expresión (4.41).

Con la expresión del  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}^{\sigma}$  en el espacio de DeSitter podemos pasar a analizar las soluciones autoconsistentes tal como lo hicimos antes en el caso del campo escalar. La ecuación de Einstein semiclásica (4.42) es idéntica a la de antes si reemplazamos la función  $F(x)$  por  $F_{\sigma}(x)$  definida de la siguiente manera:

$$F_{\sigma}(x) = F(x) + 15 \times \sigma \frac{(x + 12(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}))}{\pi \cos \pi \nu} \tag{4.51}$$

Para estudiar nuevamente las curvas  $R$  vs  $m$  (o  $R$  vs  $\Lambda$ ) debemos



estudiar la función  $F_{\sigma}(x)$ . Para ahorrar esfuerzo conviene notar que el comportamiento de  $F_{\sigma}(x)$  para  $x \rightarrow \infty$  es el mismo que el de la función  $F(x)$  (es decir, no está afectado por la elección de la topología). En cambio lo que sí se ve afectado por la distinta topología es el comportamiento de  $F_{\sigma}(x)$  para  $x \rightarrow 0$  (el que puede diferir sustancialmente del de  $F(x)$ ). Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  en la expresión (4.46a) dependen fuertemente del valor del índice  $\sigma$ . Si hacemos un análisis detallado de estas modificaciones podemos concluir lo siguiente:

-si para  $\sigma=0$  estábamos en el caso (a), para  $\sigma=-1$  seguiremos estando en ese caso mientras que para  $\sigma=1$  el comportamiento de la función  $F_{\sigma+1}(x)$  será como el de  $F(x)$  caso (b) (es decir, la función  $R(m)$  pasa a ser bivaluada al cambiar la topología).

-si para  $\sigma=0$  estábamos en el caso (b), tanto para  $\sigma=-1$  como para  $\sigma=1$  el comportamiento de  $F_{\sigma}(x)$  será análogo al de  $F(x)$  en el caso (b) (lo único que puede modificar la topología es la pendiente de la curva en  $x=0$ , tal como se indica con línea punteada en la figura 10, lo que en este caso no tiene mayor importancia).

-si para  $\sigma=0$  estábamos en el caso (c), nuevamente para  $\sigma=-1$  y  $\sigma=1$  seguiremos estando en este caso (a menos de un cambio en la pendiente en la curva en el origen, tal como se muestra en línea punteada en la figura 11).

-si para  $\sigma=0$  estábamos en el caso (d), para  $\sigma=1$  seguiremos en el mismo caso al igual que para  $\sigma=-1$ . Para  $\sigma=-1$  se modifica la pendiente de la curva en el origen (tal como se ve en la línea punteada de la figura 12) lo que provoca que la curva  $R(m)$  sea levemente diferente ya que tiene un tramo descendente tal como se

observa en la línea de puntos de la figura 15.

En todos los casos la distinta topología afecta los valores numéricos que caracterizan a las distintas curvas (por ejemplo los puntos en los que se anula la función  $F(x)$ , etc).

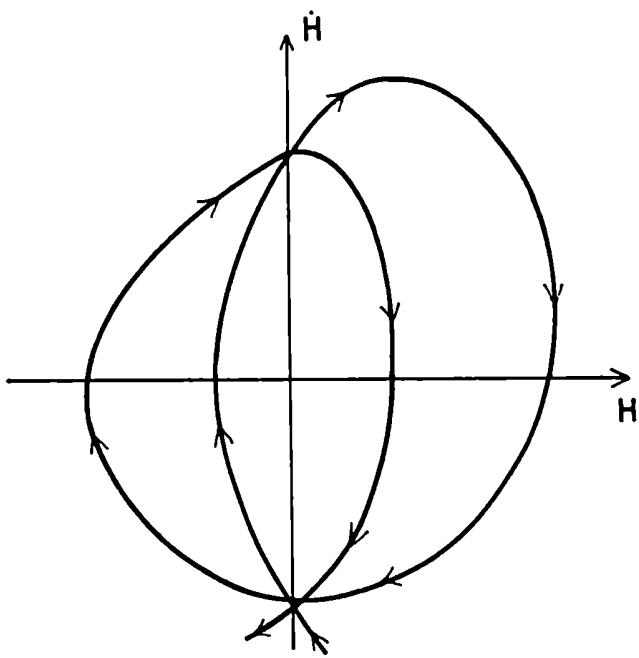


FIGURA 1

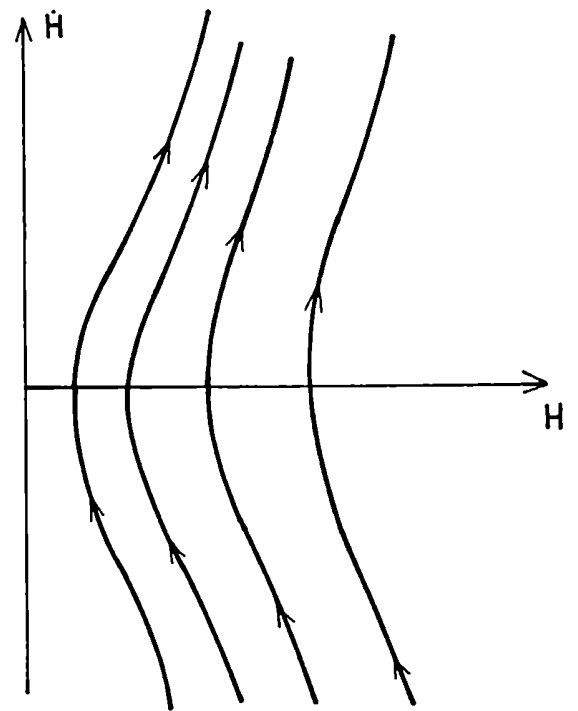


FIGURA 2

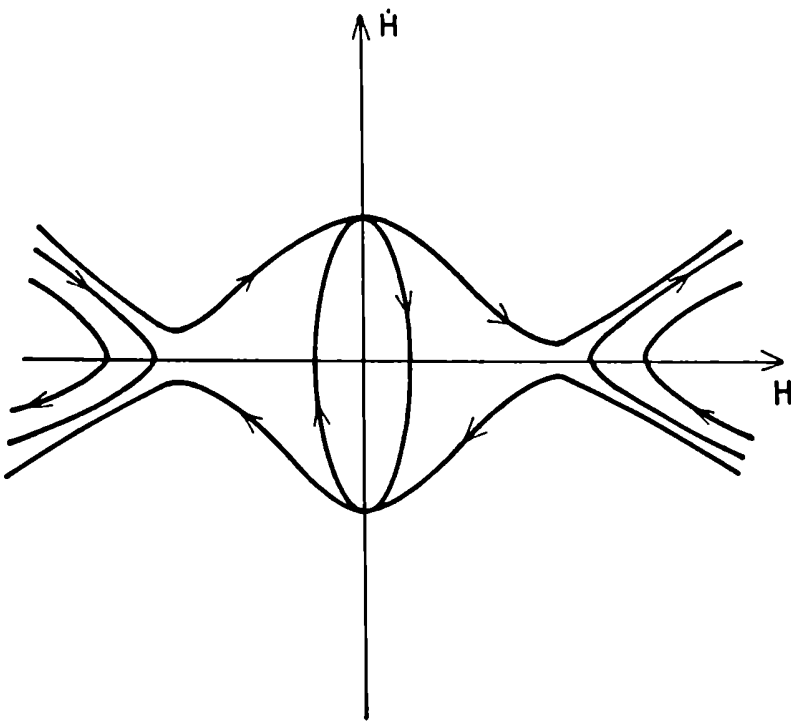


FIGURA 3

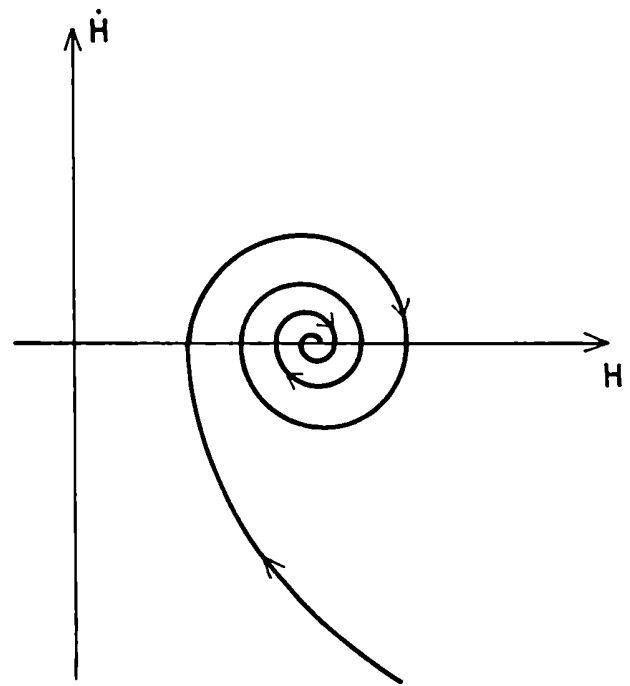


FIGURA 4

Trayectorias en el plano de fases de la ecuación (4.34). Los puntos fijos son soluciones tipo DeSitter. Las diferentes familias corresponden a distintos juegos de parámetros.

Fig. 1: no hay puntos fijos.  $D < 0, \Lambda > 0, \beta' > 0$

Fig. 2: no hay puntos fijos.  $D < 0, \Lambda > 0, \beta' < 0$

Fig. 3: hay dos puntos fijos.  $\sim D > 1, \Lambda > 0, \beta' < 0$

Fig. 4: hay dos puntos fijos.  $D > 1, \Lambda < 0, \beta' < 0$

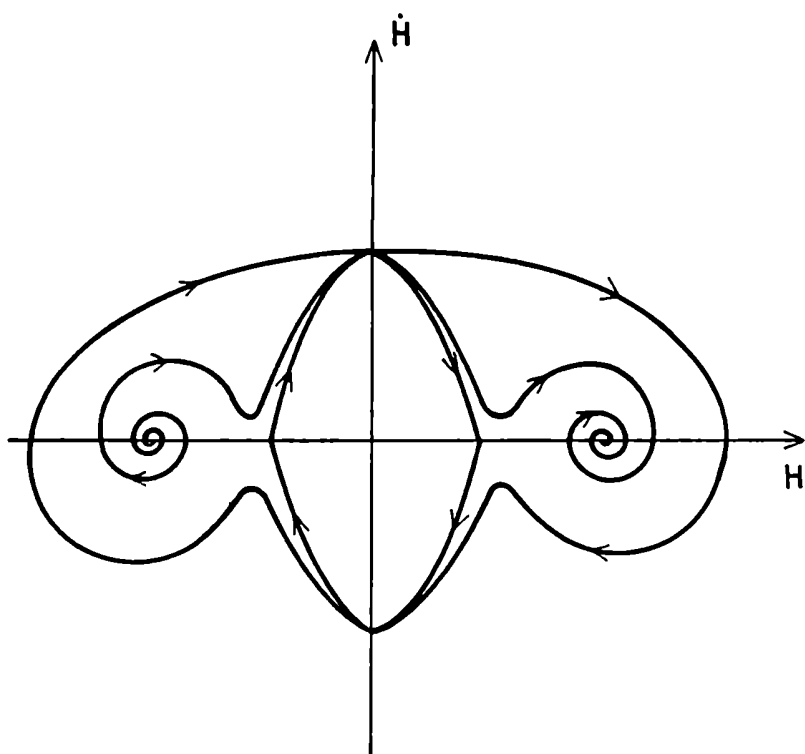


FIGURA 5

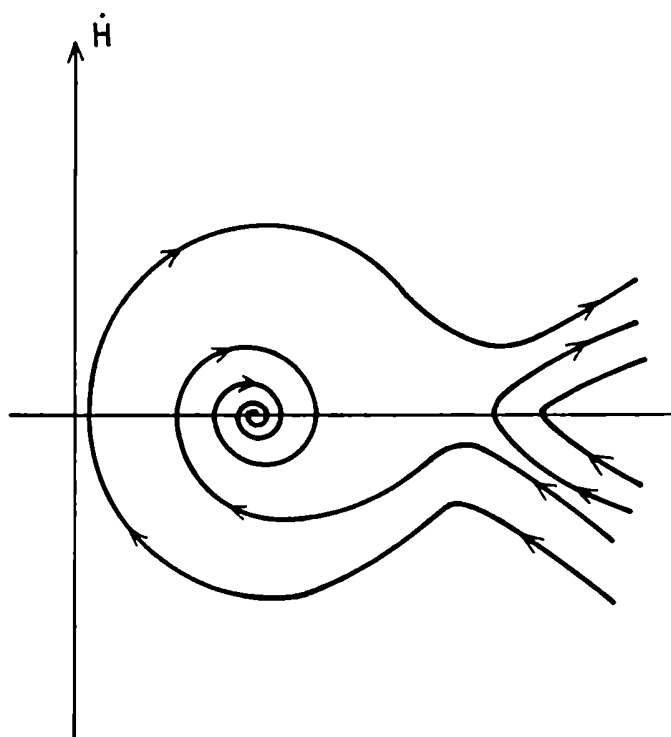


FIGURA 6

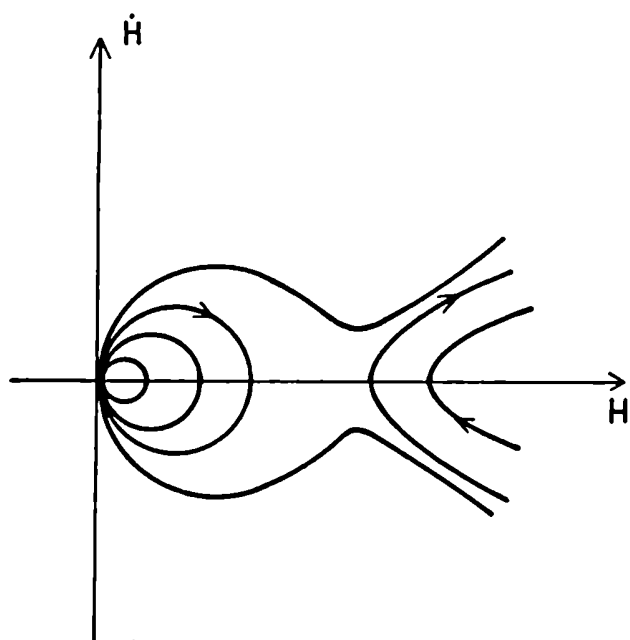


FIGURA 7

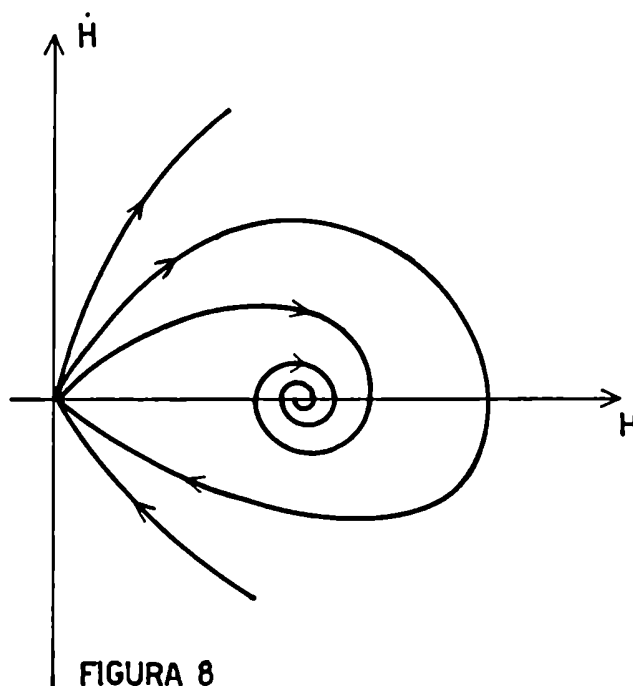


FIGURA 8

Trayectorias en el plano de fases de la ecuación (4.34). Los puntos fijos son soluciones tipo DeSitter. Las diferentes familias corresponden a distintos juegos de parámetros.

Fig. 5: hay cuatro puntos fijos.  $0 < D < 1$ ,  $\Lambda > 0$ ,  $\beta' > 0$

Fig. 6: hay cuatro puntos fijos.  $0 < D < 1$ ,  $\Lambda > 0$ ,  $\beta' < 0$

Fig. 7: El caso  $\Lambda = 0$ ,  $\beta' > 0$ . A esta familia de soluciones pertenece el modelo de Starobinsky

Fig. 8: El caso  $\Lambda = 0$ ,  $\beta' < 0$ .

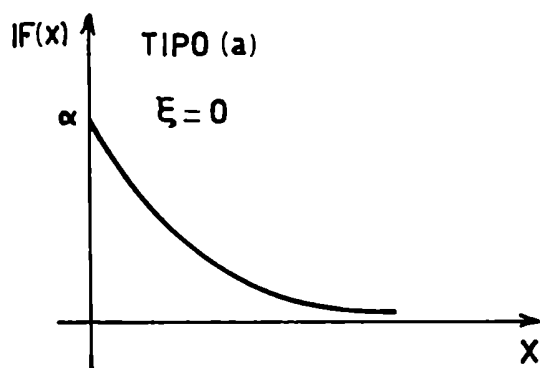


FIGURA 9

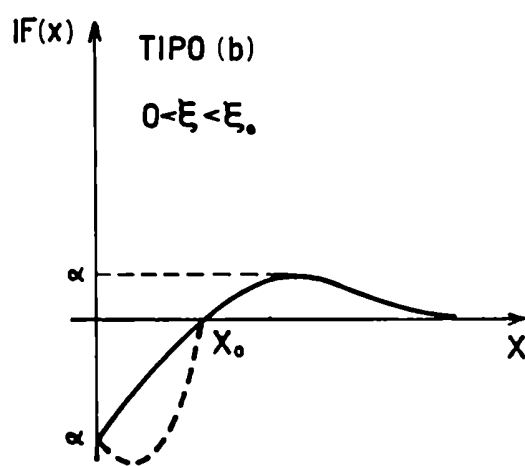


FIGURA 10

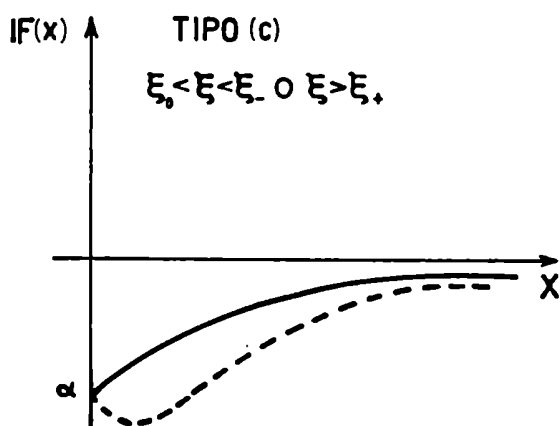


FIGURA 11

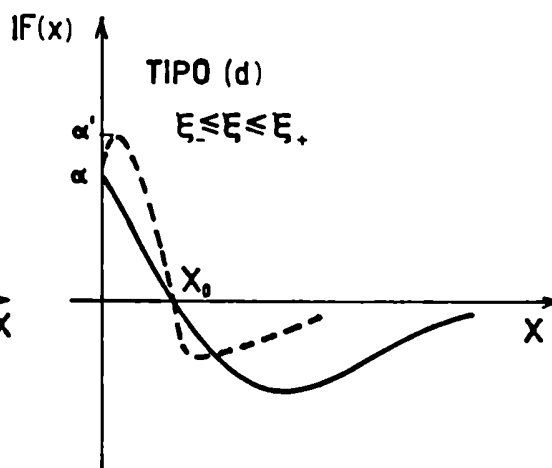


FIGURA 12

Los gráficos de la función  $F(x)$  definida en (4.42) para todo el rango de valores de la constante  $\xi$ . En línea punteada se indican los cambios (cualitativos) que se producen al modificarse la topología.

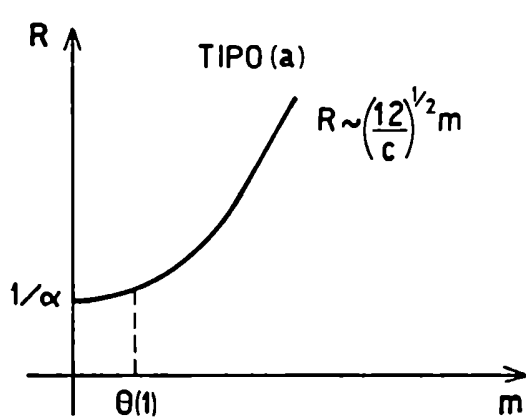


FIGURA 13

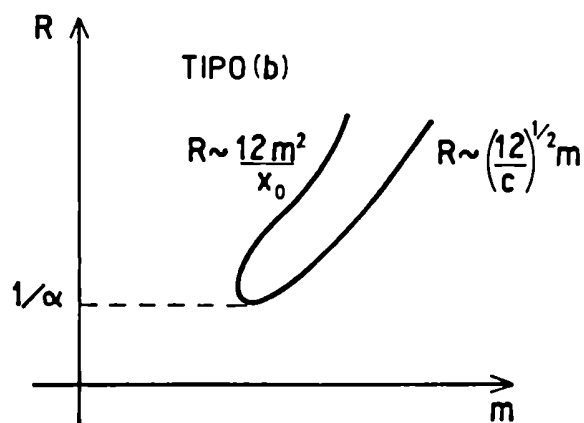


FIGURA 14

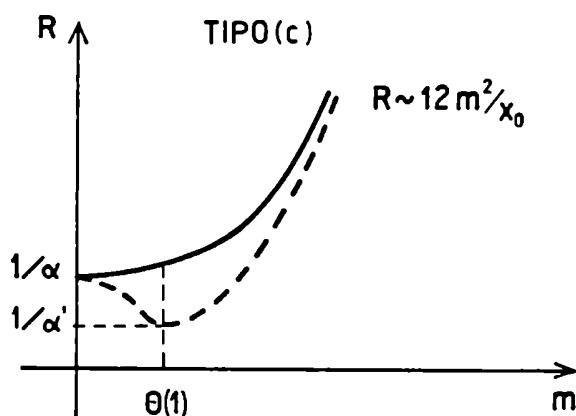


FIGURA 15

La curvatura ( $R$ ) en función de la masa ( $m$ ) para las soluciones autoconsistentes de DeSitter obtenidas de la ecuación (4.43) en el caso  $\Lambda=0$ . Los distintos tipos de curva corresponden a distintos valores de la constante  $\xi$  (ver figuras 9 a 12).

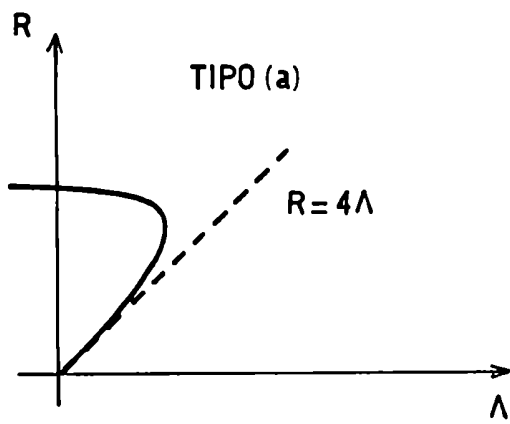


FIGURA 16

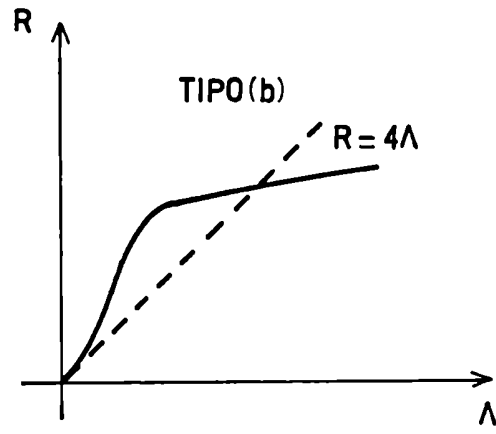


FIGURA 17

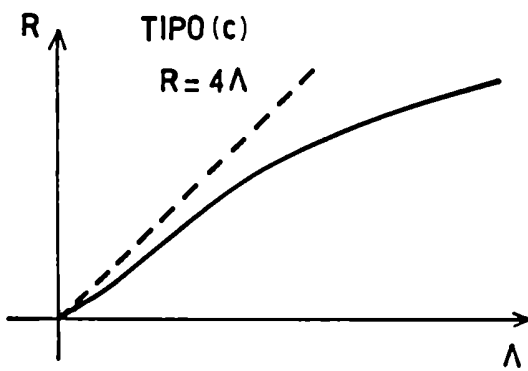


FIGURA 18

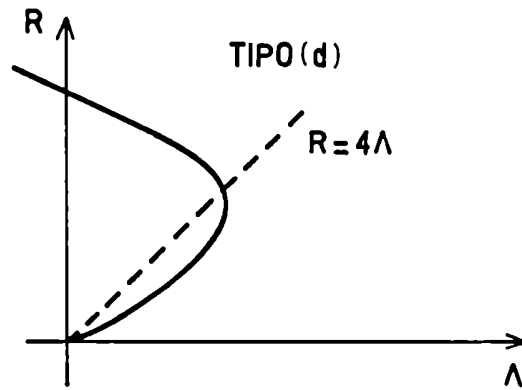


FIGURA 19

La curvatura ( $R$ ) en función de la constante cosmológica ( $\Lambda$ ) para las soluciones autoconsistentes de DeSitter obtenidas de la ecuación (4.43). En línea punteada se indica la solución clásica  $R=4\Lambda$ . Los distintos tipos de curva corresponden a la clasificación que se muestra en las figuras 9 a 12.

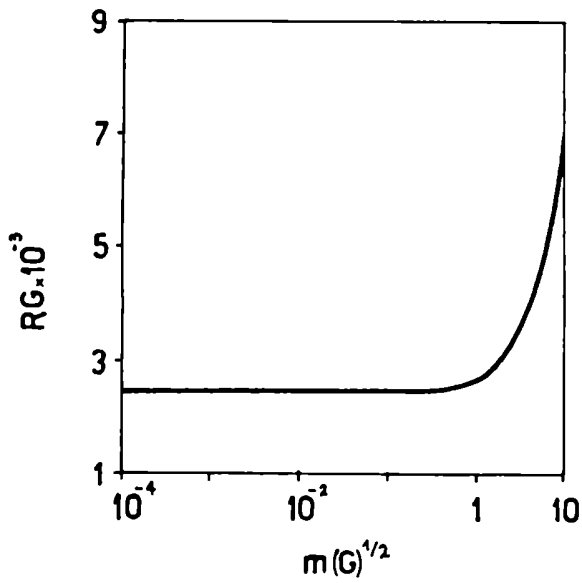


FIGURA 20

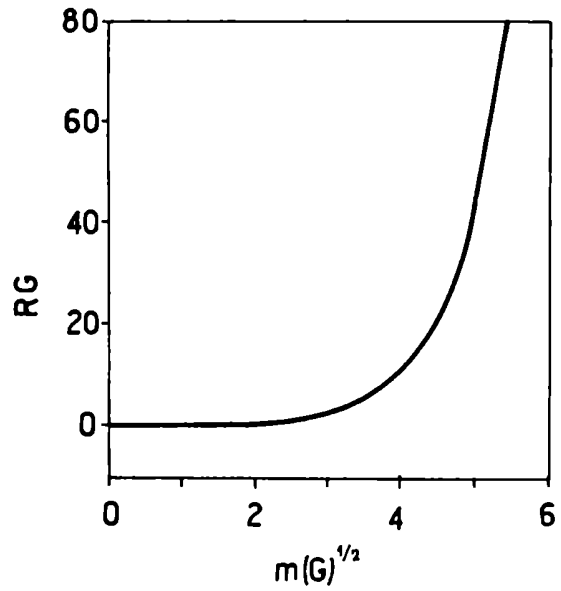


FIGURA 21

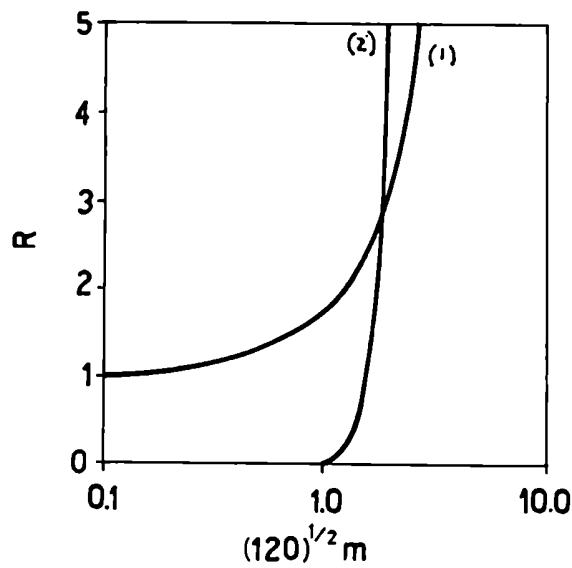


FIGURA 22

- Fig. 20: La curvatura de la solución autoconsistente de DeSitter en función de la masa ( $m$ ) de un campo de espín  $1/2$
- Fig. 21: La curvatura de la solución autoconsistente de DeSitter en función de la masa ( $m$ ) de un campo de Weinberg de espín  $1$ .
- Fig. 22: La curvatura ( $R$ ) de la solución autoconsistente de DeSitter en función de la masa ( $m$ ) de un campo escalar. La curva (1) corresponde al caso en que utilizamos la renormalización de Hadamard y la curva (2) al uso de la renormalización mínima (notar que en este caso la solución autoconsistente sólo existe si la masa es mayor que la masa umbral ( $m_u^2 = 288\pi^2 \kappa^{-1}$ )).



## 5. Conclusiones

En esta tesis hemos discutido diversos aspectos de la teoría cuántica de campos en el espacio tiempo curvo. Principalmente nos hemos dedicado a analizar críticamente el problema de la renormalización (tanto al nivel de la acción efectiva como al nivel de las ecuaciones de campo), el del vacío semiclásico (y su relacion con el tema de la renormalizabilidad de la teoría) y hemos analizado también algunas de las soluciones cosmológicas que se obtienen de las ecuaciones semiclásicas de Einstein.

Presentamos aquí, a modo de resumen, las principales contribuciones originales que se han volcado a lo largo de la tesis.

En el capítulo 2, se discute el problema de la renormalización al nivel del tensor de energía momento y se presentan dos aportes originales:

1. se generaliza el metodo de renormalización mínima a todas las métricas conformes al plano utilizando el lenguaje propio de la renormalización de Hadamard y
2. se calcula explícitamente el valor de expectación de vacío de la traza del tensor de energía-momento para campos de Weinberg masivos de espín arbitrario en el espacio de DeSitter.

Las contribuciones originales contenidas en este capítulo se

encuentran publicadas en los siguientes trabajos: Castagnino, Gunzig, Nardone y Paz (1986), Castagnino, Harari y Paz (1986 a y b).

En el capítulo 3, se discute el problema de la definición del estado de vacío y la contribución original es la siguiente:

3. se estudian cuales son los datos de Cauchy mas generales compatibles con el requisito de que el propagador  $G(x, x')$  posea las mismas divergencias que uno de Hadamard en el límite  $x \rightarrow x'$ . Como parte de este estudio se demuestra que el propagador adiabático posee esa propiedad. El análisis se realiza en las métricas (3.3) que son de gran interés cosmológico. Se discute la compatibilidad de esta condición con los criterios globales mas conocidos (el de Ferraro y Castagnino en especial) encontrandose que los criterios globales y los locales solo son compatibles en casos particulares. Las contribuciones originales contenidas en este capítulo se encuentran publicadas en el siguiente trabajo: Mazzitelli, Paz y Castagnino (1987).

En el capítulo 4, se analizan algunas consecuencias cosmológicas de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo curvo. Las contribuciones originales son las siguientes:

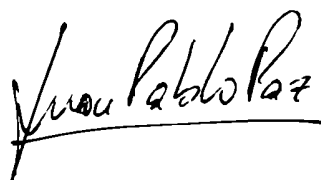
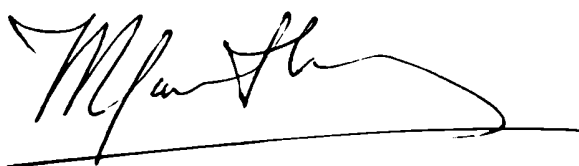
4. se presenta un método que permite estudiar el problema del back-reaction para una teoria  $\lambda \phi^4$  en la aproximación de un loop. Hasta el momento solo existía un esquema de trabajo para campos libres. El método permite tambien el análisis de la evolución del valor medio del campo de Higgs en una métrica de fondo dada de

antemano así como también el cálculo del potencial efectivo de la teoría utilizando resultados conocidos para campos libres con masa. Por otra parte encontramos que el enfoque habitualmente utilizado en los trabajos de la literatura sobre modelos inflacionarios se obtiene a partir del nuestro si despreciamos una serie de efectos que pueden ser importantes. Estos son principalmente los efectos de la polarización del vacío, los efectos de las inhomogeneidades del valor medio en su propia evolución y el efecto del estado cuántico del sistema. Mostramos por último que si se desea incluir estos efectos, el problema puede ser resuelto numéricamente apelando a las técnicas utilizadas para campos libres.

5. se analizan las características de las soluciones tipo DeSitter de las ecuaciones del back-reaction para campos libres genéricos, discutiéndose también las diferencias que aparecen en los resultados al utilizar el método de renormalización mínima.
6. se estudian la influencia de la topología en las características de las soluciones tipo DeSitter. Se muestra explícitamente la existencia de un efecto cuántico interesante: a través de las ecuaciones semiclásicas de Einstein, la topología puede influir sobre la métrica del espacio-tiempo (cosa que clásicamente no puede ocurrir).

Los aportes originales contenidos en este capítulo se encuentran publicados en los siguientes trabajos: Paz, Harari y Castagnino (1985), Castagnino y Paz (1985) y (1986), Castagnino, Paz y Sanchez (1987), Paz y Mazzitelli (1987 a y b).

Pensamos que puede ser interesante continuar estos trabajos en distintas direcciones. En primer lugar la continuacion del camino emprendido en la seccion 4.2 incluyendo efectos termicos, abriria la posibilidad de formular un modelo inflacionario verdaderamente consistente. Las tecnicas desarrolladas en los trabajos de Semenoff y Weiss (1985 a y b) pueden ser de gran utilidad en este sentido (ver tambien Ringwald (1987 b)). Por otra parte un tema atractivo, que tambien encuentra su campo de aplicacion en los modelos inflacionarios, es el estudio de los efectos no perturbativos mediante el uso de la aproximacion gaussiana (el uso de la aproximacion de un loop ha sido cuestionado recientemente como puede verse en el trabajo de Guth y Pi (1985)). En este sentido la tecnica del desarrollo de Schwinger DeWitt modificada presentada en el capitulo 1 ha mostrado ser de gran utilidad (ver Mazzitelli y Paz 1987 a, esta tecnica parece ser tambien aplicable al estudio del problema de la cuantificacion de un campo en presencia del background de un soliton tema que puede ser abordado utilizando algo de la "tecnologia" propia de la teoria de campos en el espacio tiempo curvo).



## Apéndice 1

## Notación y Convenciones

1- Signatura de la métrica:  $(-, +, +, +)$

2-  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0, 1, 2, 3$      $i, j, k, l, m, \dots = 1, 2, 3$

3- Derivadas:

$$\text{ordinaria } A_{\nu;\mu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

$$\text{covariante } A_{\nu;\mu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} A_{\rho}$$

$$\text{regla de conmutación: } T_{\mu\nu\gamma}^{\rho} - T_{\mu\gamma\nu}^{\rho} = R_{\gamma\mu\nu}^{\rho} T^{\rho}$$

$$\text{D'Alambertiano: } \square X = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} X = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} X)$$

4- Conexión afín:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \{ g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} \}$$

5- Tensor de curvatura:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma_{\nu\beta,\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\nu\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} \Gamma_{\nu\beta}^{\gamma}$$

$$R_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

6- Tensor de Weyl:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} \{ g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma} \} - \frac{1}{6} R \{ g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \}$$

7- Tensores de "cuarto orden adiabático":

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} d^4x R^2 \\ &= 2R_{;\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \square R + \frac{g_{\mu\nu}}{2} R^2 - 2R R_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} d^4x R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \\ &= R_{;\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - 2R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} d^4x R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= 2R_{;\mu\nu} - 4\square R_{\mu\nu} + 4R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} + 4R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} - \\ &\quad - 2R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}{}^{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \end{aligned}$$

en 4 dimensiones se cumple que  $\int d^4x \sqrt{-g} (R^2 - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta})$  es un invariante topológico y por lo tanto se verifica que

$$H_{\mu\nu} = -H_{\mu\nu}^{(1)} + 4H_{\mu\nu}^{(2)}$$

Entre  $H_{\mu\nu}^{(1)}$  y  $H_{\mu\nu}^{(2)}$  se cumple además la siguiente relación

$$H_{\mu\nu}^{(1)} - 3H_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

B- Distancia geodésica y límites de coincidencia:

$\sigma = \frac{1}{2} S^2(x, x')$ , cumple con las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \sigma_{;\mu} \sigma^{;\mu} &= 2\sigma \\ \square\sigma &= n - \sigma_{;\alpha} (\ln \Psi)^{;\alpha} \end{aligned}$$

donde  $\Delta(x, x')$  es el determinante de Van-Vleck Morette

$$\Delta(x, x') = (-g(x))^{-\frac{1}{2}} \det(\mathcal{J}_{;\mu\nu}) (-g(x'))^{-\frac{1}{2}} \equiv \Psi^2(x, x')$$

Los siguientes son algunos límites de coincidencia útiles que se derivan a partir de las ecuaciones diferenciales que definen a  $\sigma$  si se utiliza la regla de conmutación de derivadas covariantes:

$$[\sigma_{;\mu}] = 0 \quad [\sigma_{;\mu\nu}] = g_{\mu\nu}$$

$$[\sigma_{;\mu\nu}; \sigma] = 0 \quad [\sigma_{;\mu\nu}; \sigma_{;\rho}] = \frac{2}{3} R_{\mu\nu\rho}$$

$$[\Psi] = 1 \quad [P_{;\mu}] = 0$$

$$[P_{;\mu\nu}] = \frac{P_{;\mu\nu}}{6} \quad [P_{;\mu\nu}; P_{;\rho}] = \frac{P_{;\mu\nu\rho}}{6}$$

$$[\Psi; \delta^{\rho}_{\mu\nu}] = \frac{3}{20} R_{;\mu\nu} + \frac{1}{20} \square R_{\mu\nu} + \frac{R R_{\mu\nu}}{36} - \frac{R_{\mu\alpha} R^{\alpha}_{\nu}}{15} + \\ + \frac{R_{\mu\alpha\beta\gamma} h^{\alpha\beta}}{20} + \frac{R_{\mu\alpha\beta\gamma} h^{\alpha\beta\gamma}}{20}$$

#### 9- Formalismo de tetradas

$a, b, c, \dots, m, n, p, \dots$  = índices lorentzianos

métrica:  $g_{\mu\nu} = V_{\mu}^a V_{\nu}^b \eta_{ab}$

derivada covariante:  $\partial_a = V_a^{\mu} (\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu})$

conexión:  $\Gamma_{\mu} = \frac{1}{2} \sigma^{ab} V_a^{\nu} V_{b\nu;\mu}$

donde  $\sigma^{ab}$  son los generadores del grupo de Lorentz en la representación en la que vive el objeto que se deriva.



## Apéndice 2

### Regularización de las integrales que aparecen en la sección 2.3

Todas las funciones de Whittacker  $W_{s_3, \nu}(z)$  (con  $s_3$  entero o semientero) pueden reducirse a combinaciones lineales de la  $W_{0, \nu}(z)$ . Estas últimas están relacionadas con funciones de Hankel (Erdelyi, 1959, ecuación 6.9.1.12) y sus integrales pueden regularizarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^d W_{0, \nu}(ix) W_{0, \nu}(-ix) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int x^{d+1-\epsilon} 2^d \pi H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(1)}(x) dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{\sin \pi \nu \sin \pi \mu} \cdot \left\{ L(\mu, \nu) + \right. \\ &\quad \left. + L(-\mu, -\nu) - L(\mu, -\nu) - L(-\mu, \nu) \right\} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} L(\mu, \nu) &= \frac{2^{2d+1} (-1)^{d+1} \Gamma(1+d/2+\mu+\frac{\nu}{2})}{(d+1)! \Gamma(-\frac{d}{2}+\mu+\frac{\nu}{2}) \Gamma(-\frac{d}{2}+\frac{\nu-\mu}{2}) \Gamma(-\frac{d}{2}+\mu-\frac{\nu}{2})} \cdot \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(d+2) - \right. \\ &\quad \left. - \ln 2 - \frac{1}{2} \Psi(1+\frac{d}{2}+\mu+\frac{\nu}{2}) - \frac{1}{2} \Psi(-\frac{d}{2}+\frac{\nu-\mu}{2}) - \frac{1}{2} \Psi(-\frac{d}{2}+\mu-\frac{\nu}{2}) \right\} \end{aligned}$$

Usando esas expresiones la integral:

$$\tilde{I}_{s_3} = \int_0^\infty x dx W_{s_3, \nu}(ix) W_{-s_3, \nu}(-ix)$$

puede calcularse, dando lugar a los siguientes resultados:

$$\tilde{I}_0 = -2\pi^2 \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln 2 - \frac{\Psi(3/2+\nu) + \Psi(3/2-\nu)}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$\tilde{I}_{1/2} = 4(1+\pi^2) \left( -\frac{1}{\epsilon} - \ln 2 + \frac{1}{2} + 12\zeta(3) \Psi(1/2) \right) + 4 + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= 2(2+\pi^2) \left( \frac{1}{\epsilon} + \Psi(1) - \Psi(1/2) - \ln 2 - \frac{\Psi(3/2+\nu) + \Psi(3/2-\nu)}{2} \right) - \frac{1}{12} (65-\pi^2) + \\ &\quad + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

con  $v^2 = \frac{9}{4} - 12z - 5(s+1) - \pi^2$

Por otra parte las otras integrales que aparecen en 2.3 se regularizan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + \pi^2)^{1/2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{x^{2-\epsilon} dx}{(x^2 + \pi^2)^{1/2}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{4} \left( -\frac{2}{\epsilon} + \ln \pi^2 + 1 - 2 \ln 2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + \pi^2)^{3/2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{x^{2-\epsilon} dx}{(x^2 + \pi^2)^{3/2}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \pi - 1 + \ln 2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(x^2 + \pi^2)^{5/2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{x^{4-\epsilon} dx}{(x^2 + \pi^2)^{5/2}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \pi - \frac{4}{3} + \ln 2 \right) \end{aligned}$$

### Apéndice 3

#### Calculo del propagador adiabático en las métricas (3.3).

Vamos a exponer aquí los cálculos necesarios para obtener una expresión para  $G_1^{A1}(\bar{x}, t, \bar{x}', t)$  en las métricas del tipo (3.3). Como vimos, el desarrollo adiabático de los modos normales lleva a la ecuación (3.12). Podemos escribir al coeficiente  $A_1$  que aparece en ella de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right)R + \left(\frac{R}{6} - \frac{9}{4}H^2 - \frac{3}{2}\dot{H}\right) - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{k_i k_j}{\omega^2} + \frac{2}{15} \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} k_i k_j\right)^2}{\omega^4} \\ &\equiv \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right)K + F + F^{ij} \frac{k_i k_j}{\omega^2} + \frac{\left(F^{ij} k_i k_j\right)^2}{\omega^4} \end{aligned} \quad (A3.1)$$

Si denotamos además

$$F_1(r) = iR \int \frac{d^3 k}{(2\pi a)^3} \frac{e^{ik_j r_j}}{\omega_k} \quad (A3.2)$$

la ecuación (3.13) puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} G_1^{A1}(\bar{x}, t, \bar{x}', t) &= \left[ 1 + \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right)R + F \right\} \frac{\partial}{\partial m^2} + \frac{2}{3} F^{ij} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} \left( \frac{\partial}{\partial m^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{15} G^{ij} G^{lm} \frac{\partial^4}{\partial r_i \partial r_j \partial r_l \partial r_m} \left( \frac{\partial}{\partial m^2} \right)^3 \right] F_1(r) \end{aligned} \quad (A3.3)$$

Por otra parte, la función  $F_1(r)$  puede evaluarse haciendo un cambio de variables del tipo  $k_i = B_i^j k_j$  tal que  $g^{ij} k_i k_j = k'_i k'_i$ . La matriz  $B$  satisface:

$$B^T g B = \mathbb{1} \quad \text{y} \quad \det B = (\det g)^{1/2} \quad (\text{A3.4})$$

(sólamamente aquí con  $g$  denotamos a la matriz  $g_{\mu\nu}$ ). El resultado del cálculo es:

$$F_1(r) = \Delta_1(x) \quad (\text{A3.5})$$

con  $x = \frac{1}{2} g_{ij} r^i r^j$ . Las derivadas respecto de  $m^2$  y de  $r^i$  pueden calcularse siendo el resultado de estas últimas el siguiente:

$$\frac{\partial F_1}{\partial r^i} = r_i F_1'(x) \quad (\text{A3.6a})$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^i \partial r^i} = r_i r_i F_1''(x) + g_{ij} F_1'(x) \quad (\text{A3.6b})$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial r^i \partial r^i \partial r^k} = r_i r_i r_k F_1'''(x) + F_1''(x) (r_k g_{ij} + r_i g_{kj} + r_j g_{ki}) \quad (\text{A3.6c})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F_1}{\partial r^i \partial r^i \partial r^k \partial r^k} &= r_i r_i r_k r_k F_1''''(x) + F_1'''(x) (g_{ek} r_i r_j + \text{p.c.}) \\ &+ F_1''(x) (g_{ek} g_{ij} + g_{je} g_{ik} + g_{kj} g_{ie}) \end{aligned} \quad (\text{A3.6d})$$

Finalmente, reemplazando en la fórmula (A3.3) se obtiene el resultado final que está escrito en la ecuación (3.9a).

## Apéndice 4

Calculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  a partir de  $G_F^{SD}(x, x')$

Partiendo de la expresion (1.19) para  $G_F^{SD}(x, x')$  podemos derivar dos veces y luego tomar el límite de coincidencia obteniendo el siguiente resultado:

$$[G_F^{SD}]_{;\mu\nu} = \left(\frac{f}{\mu^2}\right)^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \sum_{k \geq 0} \left\{ -\frac{g_{\mu\nu} [\Omega_k]}{2} f^{2-k} \Gamma(k - \frac{n}{2}) + \right. \quad (A4.1)$$

$$+ f^{1-k} \Gamma(1+k - \frac{n}{2}) ([\Omega_k]_{;\mu\nu} + [\Omega_k]_{;\nu\mu}) - \frac{f}{2} \Gamma(k+2 - \frac{n}{2}) ([\Omega_k] f_{;\mu\nu} +$$

$$+ f_{;\mu} [\Omega_k]_{;\nu} + f_{;\nu} [\Omega_k]_{;\mu}) + \frac{1}{4} f^{1-k} \Gamma(k+3 - \frac{n}{2}) f_{;\mu} f_{;\nu} [\Omega_k] \Big\}$$

El calculo de  $[G_F]_{;\mu\nu}$  y  $[G_F]$  es mucho mas sencillo, los resultados que se obtienen son los siguientes:

$$[G_F] = \left(\frac{f}{\mu^2}\right)^{\frac{n-4}{2}} \sum_{k \geq 0} f^{1-k} \Gamma(k+1 - \frac{n}{2}) [\Omega_k] \quad (A4.2)$$

$$[G_F]_{;\mu\nu} = \left(\frac{f}{\mu^2}\right)^{\frac{n-4}{2}} \sum_k \left\{ f^{1-k} \Gamma(k+1 - \frac{n}{2}) [\Omega_k]_{;\mu\nu} - \right. \quad (A4.3)$$

$$- f^{1-k} \Gamma(k+2 - \frac{n}{2}) (f_{;\mu} [\Omega_k]_{;\nu} + f_{;\nu} [\Omega_k]_{;\mu}) +$$

$$+ f^{1-k} \Gamma(k+3 - \frac{n}{2}) f_{;\mu} f_{;\nu} [\Omega_k] \Big\}$$

en todas las ecuaciones anteriores tomamos  $f \equiv f(x, x)$

Desarrollando (A4.1)-(A4.3) alrededor de  $n=4$ , podemos identificar las partes divergentes de las tres expresiones las que resultan ser:

$$[G_F^{SD}]_{;\mu\nu}^{(div)} = \left(\frac{f}{\mu^2}\right)^{\frac{n-4}{2}} \frac{\Gamma(3 - \frac{n}{2})}{(2 - \frac{n}{2})} \left\{ -\frac{g_{\mu\nu} f^2}{n(\frac{n}{2} - 1)} + \frac{g_{\mu\nu} f [\Omega_1]}{2(\frac{n}{2} - 1)} - \right. \quad (A4.4)$$

$$- \frac{g_{\mu\nu} [\Omega_2]}{2} - \frac{f R_{\mu\nu}}{6(\frac{n}{2} - 1)} + ([\Omega_1]_{;\mu\nu} + [\Omega_1]_{;\nu\mu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f_{;\mu\nu}) \Big\}$$

$$[G_F]^{\text{div}} = \frac{\left(\frac{f}{\mu^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(3-n/2)}{(2-n/2)} \left\{ -\frac{f}{(n/2-1)} + [\mathcal{R}_1] \right\} \quad (\text{A4.5})$$

$$[G_F]_{;\mu\nu}^{\text{div}} = \frac{\left(\frac{f}{\mu^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(3-n/2)}{(2-n/2)} \left\{ [\mathcal{R}_1]_{;\mu\nu} - f_{;\mu\nu} \right\} \quad (\text{A4.6})$$

mientras que las partes convergentes estan dadas por las colas de las series que aparecen en (A4.1)-(A4.3) evaluadas en  $n=4$ . Utilizando la formula (2.11) y las expresiones anteriores junto con la forma explicita de los limites de coincidencia (4.12), llegamos a la ecuacion (4.22) para  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{div}}$ . La forma explicita de la parte convergente resulta ser la siguiente:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{conv}} = & \frac{1}{16\pi^2} \sum_{j \geq 0} \frac{j!}{j^{j+1}} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\mathcal{R}_{j+3}] + \left(3 - \frac{1}{6}\right) P_{\mu\nu} [\mathcal{R}_{j+2}] \right. \\ & - [\mathcal{R}_{j+2}; \mu\nu] + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) [\mathcal{R}_{j+2}]_{;\mu\nu} + \left(3 - \frac{1}{4}\right) g_{\mu\nu} \Box [\mathcal{R}_{j+2}] + \\ & + 2 \left( f_{;\mu} [\mathcal{R}_{j+1}]_{;\nu} + f_{;\nu} [\mathcal{R}_{j+1}]_{;\mu} \right) + \left( \frac{1}{2} f_{;\mu\nu} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) g_{\mu\nu} \Box f \right) \cdot \\ & \cdot [\mathcal{R}_{j+1}] + 2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) g_{\mu\nu} [\mathcal{R}_{j+1}]_{;\rho} f'^{\rho} + \\ & \left. + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) (f_{;\mu} f_{;\nu} - g_{\mu\nu} f_{;\rho} f'^{\rho}) [\mathcal{R}_j] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A4.7})$$

## Referencias

- Abbott L, 1983, en "Relativity, Cosmology, Topological mass and Supergravity", C Aragone ed, World Sc, Singapur
- Abbott L y Harari D, 1986, Nucl Phys B 264, 487
- Albrecht A y Brandenberger R, 1985, Phys Rev D 31, 1225
- Allen B, 1983, en "The very early universe", G W Gibbons, S W Hawking y S T Siklos ed, (Cambridge Univ Press, Cambridge, NY)
- Altembokum M, Kaulfus U y Verbarschot J M, 1986, Phys Rev D 34, 1840
- Altembokum M y Kaulfus U, 1987, Phys Rev D 35, 609
- Anderson P, 1983a, Phys Rev D 28, 271
- Anderson P, 1983b, Phys Rev D 28, 2695
- Anderson P, 1984, Phys Rev D 29, 615
- Anderson P, 1986, Phys Rev D 33, 1567
- Anderson P y Parker L, 1987, Milwaukee Univ Preprint
- Azuma T and Wada S, 1984, "General spatially flat cosmological solution to the Einstein equation with the cosmological constant and the anomaly, Univ de Tokio Komaba Report, no pub.
- Bander M y Itzykson C, 1966, Rev Mod Phys 38, 346
- Barvitskii y Vilkoviski, 1987, Nucl Phys B 282, 113
- Bel J S, Hughes R y Leinaas J M, 1985, Z Physik C 28, 75
- Bel J S y Leinaas J M, 1983, Nucl Phys B 212, 131
- Bel J S y Leinaas J M, 1986, CERN Preprint TH: 4468
- Bernard D, 1986, Phys Rev D 33, 3581
- Birrell N D, 1979 a, PhD Thesis, University of London, King's College, no publicada.

- Birrell N D, 1979 b, J Phys A: Math Gen, 10, 337
- Birrell N D y Davies P C W, 1982, "Quantum Fields in Curved Space", (Cambridge Univ Press, Cambridge, NY)
- Bollini C y Giambiaggi J J, 1972, Nuovo Cim 12 B, 20
- Bollini C y Giambiaggi J J, 1984, CBPF Preprint: CBPF-NF-046/84
- Brandenberger R, 1985, Rev Mod Phys 51, 1
- Brout R, Englert F, Frere J-M, Gunzig E, Nardone P y Truffin C, 1980, Nucl Phys B 170, 228
- Brout R, Englert F y Gunzig E, 1978, Ann Phys NY 115, 78
- Brout R, Englert F y Gunzig E, 1979, Gen Rel Grav 10, 1
- Bunch T S, 1981, Ann of Phys, 131, 118
- Bunch T S y Davies P C W, 1978, Proc R Soc London A360, 117
- Bunch T S y Panangaden P, 1980, J Phys A, 13, 919
- Bunch T S, Panangaden P y Parker L, 1980, J Phys A, 13, 901
- Bunch T S y Parker L, 1979, Phys Rev D, 20, 2499
- Calzetta E, 1986, Ann Phys NY,
- Calzetta E y Hu B-L, 1987a, Phys Rev D, 35, 495
- Calzetta E y Hu B-L, 1987b, Phys Rev D, en prensa
- Calzetta E, Jack I y Parker L, 1986a, Phys Rev Lett, 55, 1241
- Calzetta E, Jack I y Parker L, 1986b, Phys Rev D, 33, 953
- Candelas P y Raine D J, Phys Rev D 12, 1975, 965
- Castagnino M A, 1985, en Procc de la IV Escola Brasileira de Gravitacao e Cosmologia, M Novello ed., CNPq: Brasil, 150
- Castagnino M A y Chimento L P, 1986, Phys Rev D 34, 3676
- Castagnino M A, Chimento L P y Harari D, 1981, Phys Rev D 24, 290
- Castagnino M A y Ferraro R, 1984, Ann Phys NY 154, 1
- Castagnino M A y Ferraro R, 1985, Ann Phys NY 161, 1
- Castagnino M A y Ferraro R, 1986, Phys Rev D 34, 497



- Castagnino M A y Harari D, 1984, Ann Phys NY 152, 85
- Castagnino M A, Harari D y Nunez C, 1987, Jour Math Phys 28, 184
- Castagnino M A, Harari D y Paz J P, 1986 a, Class Quantum Grav 3, 569
- Castagnino M A, Harari D y Paz J P, 1986 b, Procc of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, R Ruffini (ed), Elsevier Sc Pub, 1095
- Castagnino M A, Mazzitelli D y Paz J P, 1987, Phys Lett B 169, 132
- Castagnino M A y Paul W, 1984, "On semiclassical Quantum Gravity" no publicado
- Castagnino M A y Paz J P, 1985, Phys Lett B 164, 274
- Castagnino M A y Paz J P, 1986, "Quantum mechanics of fundamental systems", 1987, C Teitelboim ed., Plenum, New York, en prensa
- Castagnino M A, Paz J P y Sanchez N, 1987, Phys Lett B 193, 13
- Castagnino M A, Verbeure A y Weder R, 1975, Nuovo Cimento 26B, 396
- Christensen S M, 1976, Phys Rev D 14, 2490
- Coleman R y Weinberg E, 1973, Phys Rev D, 7, 1888
- Cooper F y Mottola E, 1987, LANL Preprint: LA-UR-87-1720
- De Witt B S, 1964, en "Relativity Groups and Topology" eds C and B S De Witt, Gordon and Beach, NY
- De Witt B S, 1967a, Phys Rev, 160, 1113
- De Witt B S, 1967b, Phys Rev, 162, 1195 and 1239
- De Witt B y Brehme R W, 1960, Ann Phys (NY) 9, 220
- Dowker J S, 1983, Phys Rev D 28, 3013
- Dowker J S y Critchley R, 1976, Phys Rev D 13, 3224
- Dowker J S y Dowker Y P, 1966, Proc Phys Soc 87, 65
- Ferraro R, 1986, Tesis de Doctorado en Fisica, Universidad de Buenos Aires, no publicada

- Figueirido F y Castagnino M, 1985, en "Relativity, Supersymmetry and Cosmology" D Bressan et al ed, World Sc, Singapur
- Fischetti M V, Hartle J B y Hu B-L, 1979, Phys Rev D, 20, 1957
- Frenkel A y Brecher K, 1982, Phys Rev D 26, 368
- Friedberg R, Lee T D y Pang Y, 1986, Nucl Phys B 276, 549
- Fulling S A, 1973, Phys Rev D 7, 2850
- Fulling S A, 1979, Gen Rel and Grav 10, 807
- Fulling S A, Sweeny M y Wald R M, 1978, Commun Math Phys 63, 257
- Gibbons G W, 1986, Nucl Phys B 271, 5
- Gradshteyn I S y Ryzhik I W, 1965, Tables of Integrals Series and Products (New York: Academic)
- Grensing G, 1977, J Phys A: Math Gen 10, 1687
- Gunzig E y Nardone P, 1982, Phys Lett B 118, 324
- Gunzig E y Nardone P, 1984a, Phys Lett B 134, 412
- Gunzig E y Nardone P, 1984b, Gen Rel Grav 16, 305
- Gurovich V Ts y Starobinsky A A, 1979, Zh Eksp Teor Fiz 77, 1683  
1979, Sov Phys JETP, 50, 844
- Guth A y Pi S Y, 1985, Phys Rev D 32, 1899
- Guven J, 1987, Phys Rev D 35, 2378
- Harari D, 1984, Tesis de Doctorado en Fisica, Universidad de Buenos Aires, no publicada
- Hartle J B, 1980, Phys Rev D 22, 2091
- Hartle J B, 1981, Phys Rev D 23, 2121
- Hartle J B, 1984, en Procc on the second seminar on Quantum Gravity, M Markov ed., Plenum: New York
- Hartle J B y Hu B-L, 1979, Phys Rev D 20, 1772
- Hartle J B y Hu B-L, 1980, Phys Rev D 21, 2756
- Hawking S W, 1974, Nature 248, 30

- Hawking S W, 1975, Comm Math Phys 43, 199
- Hawking S W, 1979, Sci Amm 236, 34
- Hawking S W y Ellis G F R, 1973, "The large scale structure of space time", Cambridge Univ Press, Cambridge
- Hu B-L y O'Connor D J, 1984, Phys Rev D 30, 743
- Hu B-L y Parker L, 1978, Phys Rev D 17, 933
- Itsykson C y Zuber J C, 1980, "Quantum Field Theory", Mc Graw: NY
- Jack I y Parker L, 1985, Phys Rev D 31, 2439
- Jack I y Osborn H, 1984, Nucl Phys B 234, 331
- Jackiw R, 1974, Phys Rev D 9, 1686
- Jackiw R y Kerman A, 1979, Phys Lett A 71, 158
- Jordan R D, 1986, Phys Rev D 33, 44
- Keldish L V, 1964, Zh Eksp Teor Fiz 47, 515  
(1965, Sov Phys JETP, 20, 1018)
- Kofman L, Linde A y Starobinsky A A, 1985, Phys Lett B 157, 361
- Kofman L, Sahni V y Starobinsky A A, 1983, Sov Phys JETP 58, 1090
- Laciana C, 1986, Tesis de Doctorado en Fisica, Universidad de La Plata, no publicada
- Latorre J y Pascual P, 1986, Phys Rev D 34, 2339
- Lee T D, 1986, Nucl Phys B 264, 437
- Linde A, 1984, Rep Prog Phys 47, 925
- Mamaev S G y Mostepanenko V M, 1980, Sov Phys-JETP, 51, 9
- Marzenko G, Unruh W y Wald R M, 1985, Phys Rev D 31, 213
- Mazzitelli F D y Paz J P, 1987, "A simple form for the gaussian equations in curved space", enviado a Phys Rev D
- Mazzitelli F D, Paz J P y Castagnino M A, 1987, Phys Rev D
- Mazur P y Mottola E, 1986, Nucl Phys B 278, 694
- Mijic M D, Morris M S y Suen W M, 1986, Phys Rev D 34, 2934

- Najmi A H y Ottewill A C, 1984a, Phys Rev D 30, 1733
- Najmi A H y Ottewill A C, 1984b, Phys Rev D 30, 2573
- Najmi A H y Ottewill A C, 1985, Phys Rev D 32, 1942
- Nelson B L y Panangaden P, 1982, Phys Rev D 25, 1019
- O'Raifeartaigh L, 1976, Nucl Phys B 111, 501
- Parker L, 1968, Phys Rev Lett 21, 562
- Parker L, 1969, Phys Rev 183, 1057
- Parker L y Fulling S A, 1973, Phys Rev D 7, 2357
- Parker L y Fulling S A, 1974, Phys Rev D 9, 331
- Parker L, Fulling S A y Hu B L, 1974, Phys Rev D 10, 3905
- Parker L y Toms D J, 1984, Phys Rev D 29, 1584
- Parker L y Toms D J, 1985a, Phys Rev D 31, 923
- Parker L y Toms D J, 1985b, Phys Rev D 31, 2424
- Paz J P, Harari D y Castagnino M A, 1985, en "Relativity, Supersymmetry and Cosmology" O Bressan et al ed., World Scientific, Singapur
- Paz J P y Mazzitelli F D, 1987a, en "Procc of SILARG VI", M Novello ed., World Scientific, Singapur, en prensa.
- Paz J P y Mazzitelli F D, 1987b, "Renormalized evolution equations for the back-reaction problem with a self-interacting scalar field" enviado a Physical Review D
- Pi S Y y Samiullah M, 1987, Boston Univ Preprint: BU-HEP-87-13
- Ramond P, 1981, "Field Theory a modern primer", Benjamin Cummings, Massachusetts
- Ringwald A, 1987 a, Heildelberg preprint HD-THEP-87-2, Ann Phys NY, en prensa
- Ringwald A, 1987 b, Heildelberg preprint, HD-THEP-87-10
- Ruzmaikina T V y Ruzmaikin A A, 1969, Zh Eksp Teor Fiz 57, 580

1970, Sov Phys JETP 30, 372

- Roman P, 1968, "Introduction to Quantum Field Theory", North Holland, Amsterdam
- Sahni V y Kofman L, 1986, Phys Lett A 117, 275
- Sanchez N, 1979, Phys Lett B 87, 212
- Sanchez N, 1981, Phys Rev D 24, 2100
- Sanchez N, 1986, Nucl Phys B 266, 487
- Sanchez N y Folacci A, 1986, "Quantum field Theory and the Elliptic interpretation of DeSitter space", Meudon Report
- Schroedinger E, 1932, Sitz Preuss Akad Wiss, 105
- Schroedinger E, 1957, "Expanding Universes", Cambridge Univ Press, England
- Schouten J A, 1954, "Ricci Calculus", Springer Verlag: Berlin
- Schwinger J, 1951, Phys Rev, 82, 664
- Schwinger J, 1961, J Math Phys, 2, 407
- Semenoff G y Weiss N, 1985, Phys Rev D 31, 689
- Semenoff G y Weiss N, 1985, Phys Rev D 31, 699
- Starobinsky A A, 1980, Phys Lett B 91, 99
- Starobinsky A A, 1982, Phys Lett B 117, 175
- Starobinsky A A, 1984, Procc on the second seminar on Quantum Gravity, M Markov ed., Plenum: New York.
- Stevenson P, 1984, Phys Rev D 30, 1712
- Stevenson P, 1985, Phys Rev D 32, 1389
- Stevenson P y Tarrach P, 1986, Phys Lett B 176, 436
- Suen W M, 1987, Phys Rev D 35, 1793
- Suen W M y Anderson P R, 1987, Phys Rev D 35, 2940
- Synge J L, 1960, "Relativity, the general theory", Interscience, NY
- Toms D J, 1983, Phys Lett B, 126, 37

- Vilenkin A, 1982, Phys Lett B 117, 25
- Vilenkin A, 1983, Phys Rev D 27, 2848
- Vilenkin A, 1985, Phys Rev D 32, 2511
- Wada S, 1985, Phys Rev D 31, 2470
- Wada S y Azuma T, 1983, Phys Lett B 132, 313
- Weinberg S, 1964a, Phys Rev 133, B1318
- Weinberg S, 1964b, Phys Rev 134, 8882
- Weinberg S, 1972, Gravitation and Cosmology (New York: Wiley)
- Weiss N, 1986, Phys Rev D 34, 1768
- Zeldovich Y y Starobinsky A A, 1971, Zh Eksp Teor Fiz 61, 2161  
1971, Sov Phys JETP 34, 1159
- Zuk J, 1986, Phys Rev D 33, 3645
- Zuk J, 1987, Nucl Phys B 280, 125

## AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer en primer lugar al Dr Mario Castagnino no solo por su papel como director de esta tesis sino tambien por haber sabido crear a su alrededor un ambiente de trabajo y amistad que me permitio desarrollarme en todo sentido.

Quiero agradecer a todos los integrantes del Grupo de Teorias Cuanticas y Gravitacion del IAFE por su constante estimulo y su companerismo. Me siento especialmente agradecido al Dr Diego Harari quien, ademas de ser un gran amigo, desde lejos y sin saberlo oriento una buena parte de mi trabajo. Otro companero con quien he colaborado estrechamente en el ultimo ano y a quien deseo manifestar mi agradecimiento y afecto es el Dr Diego Mazzitelli.

Han sido particularmente fructiferas para el desarrollo de esta tesis las conversaciones que he sostenido con la Dra Norma Sanchez ha quien tambien expreso mi agradecimiento.

Los trabajos que han dado lugar a esta tesis han sido realizados en el Instituto de Astronomia y Fisica del Espacio a cuyos integrantes deseo agradecer por su companerismo y colaboracion. Durante el tiempo que insumio este trabajo para su ejecucion he contado con la financiacion del CONICET a traves de becas internas, agradezco por lo tanto a la institucion por el apoyo otorgado.

## AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer en primer lugar al Dr Mario Castagnino no solo por su papel como director de esta tesis sino tambien por haber sabido crear a su alrededor un ambiente de trabajo y amistad que me permitio crecer en todo sentido.

Quiero agradecer a todos los integrantes del Grupo de Teorias Cuanticas y Gravitacion del IAFE por su constante estimulo y su companerismo. Me siento especialmente agradecido al Dr Diego Harari quien, ademas de ser un gran amigo, desde lejos y sin saberlo oriento una buena parte de mi trabajo. Otro companero con quien he colaborado estrechamente en el ultimo ano y a quien deseo manifestar mi agradecimiento y afecto es el Dr Diego Mazzitelli.

Han sido particularmente fructiferas para el desarrollo de esta tesis las conversaciones que he sostenido con la Dra Norma Sanchez ha quien tambien expreso mi agradecimiento.

Los trabajos que han dado lugar a esta tesis los he realizado en el Instituto de Astronomia y Fisica del Espacio a cuyos integrantes deseo agradecer por su companerismo y colaboracion. Durante el tiempo que insumio este trabajo para su ejecucion conte con la financiacion del CONICET a traves de becas internas, agradezco por lo tanto a la institucion por el apoyo otorgado.